



位相回復におけるハイブリッドインプットアウト プット・アルゴリズムの能力について

高城 洋明*・高橋 徹**

* 九州工業大学電子工学教室 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

** 大分工業高等専門学校電気工学科 〒870-01 大分市大字牧 1666

(1992年9月17日受付, 1993年4月19日受理)

Competence of Hybrid Input-Output Algorithm for Phase Retrieval

Hiroaki TAKAJO* and Tohru TAKAHASHI**

* Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1, Sensuicho, Tobata-ku, Kitakyushu 804

** Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,
1666, Maki, Oita 870-01

(Received September 17, 1992; Accepted April 19, 1993)

The iterative phase-retrieval algorithm for reconstructing an object from modulus of its Fourier transform sometimes stagnates on the object different from the correct solution. This algorithm commonly consists of the error-reduction algorithm (ER) and the hybrid input-output algorithm (HIO). In this paper, we investigate the behavior of HIO in the case where only the support constraint is employed as the object-domain constraint and in the limit when the value of the feedback constant approaches zero, and then carry out the numerical simulations for the reconstruction of 2×2 objects with L-shaped support. As a result, it is found that, if HIO is executed alone and the feedback constant takes considerably smaller value than one, HIO has competence for overcoming the stagnation and so getting to the solution.

1. はじめに

天体スペckル干渉法やX線結晶学などのさまざまな分野において、物体のフーリエ振幅から物体のフーリエ位相を、すなわち物体そのものを回復する方法が必要とされている。現在この位相回復法として種々の方法が提案されているが、そのうちの一つに繰返し型位相回復アルゴリズムがある¹⁾。この方法はフーリエ変換とフーリエ逆変換を通して物体領域の拘束条件とフーリエ領域の拘束条件を繰返し用いながら、物体を解に収束させる方法である。物体領域の拘束条件には、サポート条件や非負条件が用いられる。サポート条件の適用とは、物体の存在しないことがわかっているサンプル点の情報を用いることであり、非負条件の適用とは、物体が負でない実数であるという事実を用いることである。また、フーリ

エ領域の拘束条件の適用とは、測定されたフーリエ振幅の情報を用いることである。

繰返し型位相回復アルゴリズムは、ノイズの影響が小さく、さまざまな先験的情報を簡単にアルゴリズムの中に取り込めるなど、多くの長所を有している。しかし、一方で重大な欠点も存在する。物体領域とフーリエ領域の両方の拘束条件を満たしている物体を解と呼ぶことにすると、繰返し型位相回復アルゴリズムは時として解以外の物体に収束して停滞してしまう²⁾。解の唯一性が保証されフーリエ振幅にノイズが存在しないときでさえも、この停滞を完全には避けることができない。この停滞問題を克服するために種々の方法が提案されている。Fienup と Wackerman による方法は、回復物体が解以外の物体に停滞してしまったときに、その停滞のタイプ(ストライプタイプやツインタイプなど)に対応した処

理を行ったあと再び位相回復アルゴリズムを実行するというものであり、停滞の克服がアルゴリズムの使用者の判断に大きく依存してしまう²⁾。また繰返し型位相回復アルゴリズムを用いてある程度収束させた後に simulated annealing を用いるという方法が提案されているが、非常に多くの計算量を必要とするという問題を有する³⁾。

通常、繰返し型位相回復アルゴリズムはエラーリダクション・アルゴリズム (ER) とハイブリッドインプットアウトプット・アルゴリズム (HIO) が組み合わされて用いられる (HIO/ER)^{2),3)}。すでにわれわれは ER が停滞の可能性を含んだアルゴリズムであることを小規模物体を用いた数値シミュレーションによって具体的に示した^{4,5)}。さらにわれわれは ER や HIO/ER を用いては脱出できない停滞から HIO を単独で用いることによって脱出できることを指摘した⁶⁾。本論文においては、物体領域の拘束条件としてサポート条件のみを用いてフィードバック定数をゼロに近づけた極限での HIO の挙動を考察する。さらに小規模物体に対する数値シミュレーションを用いて具体的に HIO の挙動を調査する。これらの結果から、HIO を通常の違い方と異なって、物体領域の拘束条件としてサポート条件のみを用いフィードバック定数を1に比べて十分小さい値にして単独で実行するならば、HIO は停滞を起こすことなく解に収束し得ることを示す。

2. 繰返し型位相回復アルゴリズム

まず記号の導入を兼ねて、すでに報告したことを中心として繰返し型位相回復アルゴリズムの復習をする。物体領域の位置を (x, y) 、フーリエ領域の空間周波数を (u, v) で表す。サンプル点は $N \times N$ とする。このとき座標 x, y および u, v は $(-N/2+1, \dots, 0, \dots, N/2)$ の値をとるものとする。回復すべき物体 (以後、原物体と呼ぶ) を $f(x, y)$ 、そのフーリエ係数を $F(u, v)$ とおく。 $f(x, y)$ と $F(u, v)$ とは DFT によって

$$F(u, v) = |F(u, v)| \exp[i\theta(u, v)] = \mathcal{F}[f(x, y)]$$

$$= \sum_{x=-N/2+1}^{N/2} \sum_{y=-N/2+1}^{N/2} f(x, y) \cdot \exp[-i2\pi(ux+vy)/N] \quad (1)$$

と関係づけられる。ここで \mathcal{F} はフーリエ変換を表し、 $\theta(u, v)$ はフーリエ位相を表す。フーリエ逆変換は

$$f(x, y) = N^{-2} \sum_{u=-N/2+1}^{N/2} \sum_{v=-N/2+1}^{N/2} F(u, v) \cdot \exp[i2\pi(ux+vy)/N] \quad (2)$$

である。今後、(1)、(2)式の $\sum \sum$ の記号は単に $\sum_{x,y}$ 、 $\sum_{u,v}$ などと略記することにする。われわれはフーリエ振幅 $|F(u, v)|$ からの物体 $f(x, y)$ の回復を考察する。したがって $|F(u, v)|^2$ にエイリアシングが生じないことの必要性から $f(x, y)$ は $N/2 \times N/2$ の範囲でのみゼロ以外の値をとるものとする。つまりサポートが正確にわかっていない場合 $N/2 \times N/2$ が最も広いサポートとなる。このような最も広いサポートに対しても、2次元以上の物体の場合そのほとんどの物体がフーリエ振幅から一意に定まることが保証される⁷⁾。ただし、物体の位置ズレや反転に対してフーリエ振幅は同一となるので、これらの多義性は許すものとする。さらに物体の非負条件がない場合には、これらの物体の異符号の多義性も許すものとする。本論文では物体が実数の場合を扱う。また、物体領域の拘束条件としてはサポート条件のみを用いることにする。

繰返し型位相回復アルゴリズムを模式的に Fig. 1 に示す。フーリエ変換される物体 $g(x, y)$ を入力物体と呼ぶ。初期物体 $g_0(x, y)$ としてはサポート内のみに非負の乱数値を与えた物体が一般に用いられる。入力物体をフーリエ変換して得られるフーリエ係数を $G(u, v)$ とおく。この $G(u, v)$ に対してフーリエ領域の拘束条件を適用する。すなわち $G(u, v)$ の位相 $\theta(u, v)$ はそのまま、振幅 $|G(u, v)|$ を測定によって得られている原物体のフーリエ振幅 $|F(u, v)|$ に置き換える。こうして得られるフーリエ係数を $G'(u, v)$ とおく。この $G'(u, v)$ を逆フーリエ変換して得られる物体 $g'(x, y)$ を出力物体と呼ぶ。出力物体に対して物体領域の拘束条件を適用して、新しい入力物体を得る。この一連の処理が入力物体に変化がなくなってアルゴリズムが収束するまで繰返される。定義から出力物体は常にフーリエ領域の拘束条件を満足しているため、アルゴリズムが収束したときの出力物体が

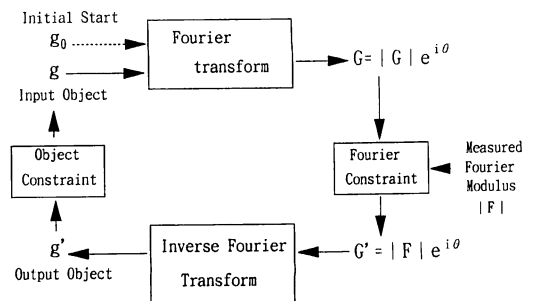


Fig. 1 Block diagram of the iterative phase-retrieval algorithm.

物体領域の拘束条件を満足しているならば、その出力物体は求めるべき解である。

繰返し型位相回復アルゴリズムの基本となる ER では、繰返し回数 m 回目の出力物体 $g'_m(x, y)$ に対して、 $m+1$ 回目の入力物体を

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (3)$$

として得る。ここで、 D は物体領域の拘束条件を満たしているサンプル点の集合である。本論文では物体領域の拘束条件としてサポート条件のみを用いるアルゴリズムについて考察する。したがって、 D はサポートに一致する。

各繰返しにおける推定エラーを見積もるために、フーリエ領域と物体領域の各々においてフーリエエラー ε_{F^2} 、オブジェクトエラー ε_{O^2} を導入する。すなわち繰返し回数 m 回目におけるエラー ε_{Fm^2} 、 ε_{Om^2} を各々、

$$\varepsilon_{Fm^2} = N^{-2} \sum_{u, v} [|G_m(u, v)| - |F(u, v)|]^2 \quad (4)$$

$$\varepsilon_{Om^2} = \sum_{(x, y) \notin D} [g'_m(x, y)]^2 \quad (5)$$

によって定義する。ER においては

$$\varepsilon_{Om^2} \geq \varepsilon_{Fm+1^2} \geq \varepsilon_{Om+1^2} \quad (6)$$

の成り立つことがわかっており¹⁾、エラーは決して増加しない。

アルゴリズムが収束するのは、入力物体が繰返しによらず変化しなくなったとき、すなわち

$$g_{m+1}(x, y) = g_m(x, y) \quad (7)$$

が成り立つときである。これを(3)式に代入すると、

$$(x, y) \in D \text{ において } g_m(x, y) = g'_m(x, y) \quad (8)$$

となる。このとき

$$(x, y) \in D \text{ において } \frac{\partial(\varepsilon_{Fm^2})}{\partial g_m(x, y)} = 0 \quad (9)$$

が成り立つ⁵⁾。すなわち(6)式とあわせて考えると、ER は入力物体のフーリエエラー ε_{F^2} が単調減少するように進行し、 ε_{F^2} が極小となる物体に収束することがわかる。このとき、もし ε_{F^2} がゼロでなければ収束物体は解ではなく ER は停滞する。この様子を概念的に Fig. 2 に示す。物体は N^2 次元空間の 1 点で表されるが、サポートのサンプル点での物体の値 (D 軸と略記)、およびサポート外のサンプル点での物体の値 ($-D$ 軸と略記) を各々 1 次元で表している。入力物体はサポート外の値がゼロであるから D 軸上を進む。一方、出力物体はフーリエ領域の拘束条件を満たしながら進む。 g_s, g'_s は ER が停滞したときの入力物体と出力物体である。このように ER は解ではない物体に収束する危険性を有するアルゴリズム

である。

HIO は、フィードバック定数 β を用いて、 g_{m+1} を

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ g_m(x, y) - \beta g'_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (10)$$

として得るアルゴリズムであり、Fienup によって初めて導入された¹⁾。 β は通常 0.5~1.0 のあいだの値が用いられる。(10)式からわかるように、ER と HIO とではサポート外のサンプル点での処理が異なっている。このことが収束物体に決定的な差異を生じる原因となる⁶⁾。すなわち(10)式を(7)式に代入するとサポート外のサンプル点において

$$(x, y) \notin D \text{ において } g'_m(x, y) = 0 \quad (11)$$

となることが導かれる。これは出力物体が物体領域の拘束条件を満足するときのみ HIO は収束して不動状態となることを意味している。したがって ER の場合とは異なり、HIO が収束して不動状態になったときの出力物体は求めるべき解であることが保証されるのである。

3. ハイブリッドインプットアウトプット・アルゴリズム (HIO) の収束

HIO の収束の可能性を検討するために、まず HIO において $\beta=0$ としたときのアルゴリズムの挙動を考える。このアルゴリズムを generalized ER (GER) と呼ぶことにする。GER の $m+1$ 回目の入力物体は、(10)式の β をゼロとにおいて

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ g_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (12)$$

となる。下段は任意の繰返し回数 m に対して、

$$(x, y) \notin D \text{ において } g_m(x, y) = g_0(x, y) \quad (13)$$

が成り立つことを意味している。したがって初期物体のサポート外の値がゼロであれば、GER は ER に一致する。

GER の挙動は ER の挙動に類似していることを示す。サポート外における出力物体 $g'_m(x, y)$ と入力物体 $g_m(x,$

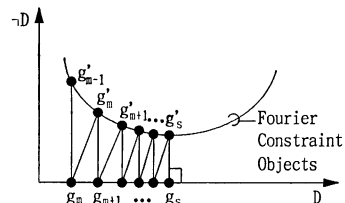


Fig. 2 Convergence of ER to the stagnation state.

y の偏差の自乗和を ε'_{0m^2} とおく。すなわち ε'_{0m^2} を

$$\varepsilon'_{0m^2} = \sum_{(x,y) \in D} [g'_m(x,y) - g_m(x,y)]^2 \quad (14)$$

と定義する。このとき付録Aに示すように、

$$\varepsilon'_{0m^2} \geq \varepsilon_{Fm+1} \geq \varepsilon'_{0m+1} \quad (15)$$

であることを導くことができるので、GERにおいて ε_{F^2} 、 ε'_{0^2} は単調減少する。そして収束時には(7)式が成り立つので、これを(12)式に代入すると、

$$(x,y) \in D \text{ において } g_m(x,y) = g'_m(x,y) \quad (16)$$

となることが導かれる。この式はERが停滞したときに成り立つ(8)式と同一である。したがってERと同様に(9)式が成り立つので、GERの入力物体はサポート外の値が初期物体の値に一致するような物体の中で ε_{F^2} が極小となる物体に収束する、とすることができる。

次に β がゼロに近い場合のHIOの挙動について考察する。特に β をゼロに近づけた極限でのHIOを infinitesimal HIO (IHIO) と呼ぶことにする。IHIOはGERに対する考察から、まずGERの経路に一致した経路をとってGERの収束物体に到達し(16)式を満たす状態となる。そこでHIOが m 回目に(16)式を満たしたものとすると、 $m+1$ 回目の入力物体は、(16)式を(10)式に代入して、

$$g_{m+1}(x,y) = \begin{cases} g_m(x,y) & (x,y) \in D \\ g_m(x,y) - \beta g'_m(x,y) & (x,y) \notin D \end{cases} \quad (17)$$

となる。右辺下段第2項の存在のため、(16)式を満たしただけではHIOは不動状態とはならない。したがって、GERの収束物体に到達したあとのIHIOの経路は、GERの収束物体をたどる経路となる。ここで任意の物体に対してサポート外の値をゼロとした物体は右肩に添え字Dをつけ、サポート内の値をゼロとした物体は右肩に添え字NDをつけて表すことにすると、(17)式は

$$g_{m+1}(x,y) = g_m(x,y) - \beta g'_m(x,y) + \beta g'^{ND}_m(x,y) \quad (18)$$

と表すことができる。したがって $g_{m+1}(x,y)$ のフーリエ係数は

$$G_{m+1}(u,v) = G_m(u,v) - \beta G'_m(u,v) + \beta G'^{ND}_m(u,v) \quad (19)$$

となる。ただし $G'^{ND}_m(u,v)$ は $g'^{ND}_m(x,y)$ のフーリエ係数である。ここで右辺の第3項の $G'^{ND}_m(u,v)$ に対して付録(B6)式が成り立つので、(19)式は

$$G_{m+1}(u,v) = G_m(u,v) - a\beta G'_m(u,v) - i\beta G'_m(u,v) \cdot \frac{N^2}{4|F(u,v)|^2} \cdot \frac{\partial(\varepsilon_{0m^2})}{\partial\theta_m(u,v)} \quad (20)$$

と表すことができる。ただし a は実数である。右辺第3項は ε_{0^2} が減少するように位相を変化させる項である。

したがってIHIOの経路はGERの収束物体をたどる経路であり、同時に ε_{0^2} が減少する経路である。そして第3項がゼロとなって ε_{0^2} が極小となる物体に到達する。このとき付録(B4)式より、

$$\text{Im}[G'(u,v)\{G'^{ND}(u,v)\}^*] = 0 \quad (21)$$

が成り立つ。これは出力物体のフーリエ位相とその物体のサポート外をゼロとした物体のフーリエ位相とが、同位相であるか π (rad) 異なるかのいずれかである(mod π の同位相)ことを示している。そこで(21)式を満足する物体を出力停滞物体と呼ぶことにする。なぜならば出力物体が出力停滞物体であるときには(20)式の右辺の第3項はゼロとなるので、第2項が第1項よりも小さい限り入力物体のフーリエ位相は変化することはない、したがって出力物体は出力停滞物体に留まるからである。このように出力物体が出力停滞物体に一致して(16)式と(21)式を同時に満足する状態を出力停滞状態と呼ぶことにすると、IHIOはGERの収束物体に到達したあとGERの収束物体をたどって出力停滞状態に到達する、とすることができる。

HIOが出力停滞状態になったとき、その出力停滞物体が解でなければ、HIOは必ず出力停滞状態から脱出することができることを前回の報告において示した⁶⁾。

今、 m 回目に出力物体が出力停滞物体 $g'_s(x,y)$ に到達して出力停滞状態となったものとすると、出力停滞物体はGERの収束物体の一つであるので(17)式より $m+1$ 回目の入力物体は、

$$g_{m+1}(x,y) = g_m(x,y) - \beta g'_s(x,y) \quad (22)$$

と表すことができる。したがって $m+k$ 回目の出力停滞状態における入力物体は、

$$g_{m+k}(x,y) = g_m(x,y) - k\beta g'_s(x,y) \quad (23)$$

と表すことができ、HIOの出力停滞状態では出力物体が g'_s に停滞しているにもかかわらず、入力物体は1回の繰返しごとに $-\beta g'_s$ ずつ変化する。このとき(23)式から

$$G_{m+k}(u,v) = G_m(u,v) - k\beta G'^{ND}_s(u,v) \quad (24)$$

が成り立つ。ところで、 $g'^{ND}_s(x,y)$ は出力停滞物体のサポート内をゼロとした物体であるので、

$$G'^{ND}_s(u,v) = G'_s(u,v) - G'^{D}_s(u,v) \quad (25)$$

が成り立つ。このことと出力停滞物体に対しては(21)式が成り立つことから、 $G'^{ND}_s(u,v)$ の位相 $\theta'^{ND}_s(u,v)$ は $\theta'_s(u,v)$ とすべての周波数において mod π の同位相である。ここですべての周波数において π (rad) 異なる

とすると, (25)式から $|G'_s(u, v)|$ よりも $|G'_s^p(u, v)|$ の方がすべての周波数において大きいことになる. ところがこれは出力停滞物体のエネルギーよりもその物体のサポート外をゼロとした物体のエネルギーの方が大きいことを意味しており矛盾する. したがって $\theta'_s(u, v)$ と $\theta'_s^{ND}(u, v)$ とが同位相となる周波数が少なくとも一つ存在する. これを (u_0, v_0) とおくと (24)式から,

$$|G_m(u_0, v_0)| > k\beta |G'_s^{ND}(u_0, v_0)| \quad (26)$$

が成り立っていることがわかる. ところが右辺は β がゼロでない限り繰返し回数 k を増やすことによって必ず左辺より大きくなるができる. すなわち出力停滞状態においては, 出力物体は出力停滞物体 $g'_s(x, y)$ に留まりながらも, 入力物体が 1 回に $-\beta g'_s^{ND}(x, y)$ ずつ変化し続けることによって, 必ずある繰返し回数で入力物体のフーリエ位相 $\theta(u_0, v_0)$ に π 反転を生じて出力停滞状態を脱出することができるのである. したがって出力停滞状態における IHIO の入力物体の経路は, 出力停滞状態となったときの位置から $|G(u_0, v_0)|$ がゼロとなる物体の位置までの g'_s^{ND} に平行な経路に一致する. この間, 出力物体は出力停滞物体に留まり続ける.

以上のことから, IHIO は

- (1) GER の収束物体に到達したあと,
- (2) GER の収束物体をたどりながら出力停滞状態に到達する.
- (3) このとき出力停滞物体が解でなければ, 入力物体のサポート外の値が変化し続けて, 出力停滞状態を脱出する.

という挙動を示して解に到達するまでの挙動を繰返す, と言うことができる. したがって IHIO は解に到達する能力を有するアルゴリズムである. この様子を HIO の挙動を含めて模式的に Fig. 3 に示す. ただし Fig. 3 では D 軸, $-D$ 軸を各々 1 次元で表示しているので, 挙動(2)に対応する状態を示すことはできない. すなわち

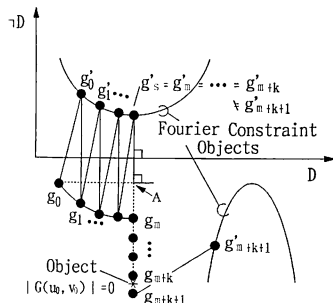


Fig. 3 Arrival of HIO at the output stagnation state, and extrication from it.

図中の D 軸に垂直な破線は GER が収束したときの入力物体の位置であり同時に HIO が出力停滞状態になる位置でもある. 出力物体は Fig. 2 と同様にフーリエ領域の拘束条件を満たす物体をたどる. 入力物体の経路は β を小さくするほど D 軸に平行な破線 (GER の経路) に近づく. そして入力物体が D 軸に垂直な破線上に到達し出力停滞状態となる. このとき入力物体が 1 回に $-\beta g'_s^{ND}$ ずつ変化し続けて, 図においては $m+k+1$ 回目に $|G(u_0, v_0)|=0$ となる物体を越えて (26)式を満たさなくなり出力停滞状態から脱出する. したがって IHIO の入力物体の経路は図中の g_0 から破線に沿って GER の収束物体 A に到達し, その後 D 軸に垂直な破線上を進み出力停滞状態から脱出するという経路に一致する.

4. シミュレーション

前章の議論によって β をゼロに近づけた極限での HIO (すなわち IHIO) が解に到達する能力を有することが明らかとなったが, 実際に HIO を用いる場合には β に有限な値を与えなければならない. 前章の挙動(3)において β が大きいほど, 出力停滞状態からの脱出に際して入力物体の 1 回の変化量が大きくなるので脱出に必要な繰返し回数は減少するが, 前章の挙動(1), (2)は β が小さいほど確実に保証される挙動であるので β が大きいと出力停滞状態への到達が必ずしも保証されない. 解は出力停滞物体の一つであるから, 出力停滞状態に到達することが保証されないときは解に到達することも保証されない. したがって β はなるべく小さな値でなければならないことが予想される. そこでこの章では, β に具体的な値を与えて HIO の挙動を調査する. このためにわれわれは ER の検討に際して以前の報告⁵⁾ で用いた $2 \times 2L$ 型物体を中心にシミュレーションを行う. すなわち, 4×4 のサンプル点に対して, L 型のサポートを有する原物体

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

を回復する問題を考える. 破線で囲んだ部分がサポートである. a, b, c は正の実数で, 各々 $f(0, 0), f(1, 0), f(0, 1)$ の値である. 原物体 $f(x, y)$ はフーリエ振幅 $|F(u, v)|$ とサポート条件から一意に確定する⁵⁾. われわれはフーリエ振幅とサポートは正確にわかっているものと仮定する. 初期物体 g_0 は (27)式の a, b, c を a_0, b_0, c_0 に置き換えた物体とする. a_0, b_0, c_0 は正の実数とする. m 回

目の入力物体のサポート内の値 $g_m(0, 0)$, $g_m(1, 0)$, $g_m(0, 1)$ を各々 a_m, b_m, c_m とおく。これらは各々 $m-1$ 回目の出力物体のサポート内の値 $a'_{m-1}, b'_{m-1}, c'_{m-1}$ に等しい。ところで出力物体のエネルギーは、フーリエ振幅が確定しているのだからパーセバルの定理により一定である。したがって、比の組 $(b_m/a_m, c_m/a_m)$ すなわち $(b'_{m-1}/a'_{m-1}, c'_{m-1}/a'_{m-1})$ の挙動を2次元平面に図示することによって、繰返しごとの入力物体および出力物体のサポート内の値の挙動を観察することができる。唯一性の保証と挙動の観察可能性が、 $2 \times 2L$ 型物体をシミュレーションに用いる理由である。

まず、ER の挙動を調べる。原物体 f が

$$f: (a, b, c) = (1, 2, 4) \tag{28}$$

の場合の ER の挙動を Fig. 4 に示す。初期物体の位置を白丸で、収束物体の位置を白四角で表示している。また、各繰返しごとの回復物体の位置を直線で結んでいる。収束物体は四つあり、そのうち三つが停滞物体、

$$g_{s1}: (a_{s1}, b_{s1}, c_{s1}) = (4.218, 0.446, 1.038), \tag{29}$$

$$g_{s2}: (a_{s2}, b_{s2}, c_{s2}) = (0.397, 4.056, 1.993), \tag{30}$$

$$g_{s3}: (a_{s3}, b_{s3}, c_{s3}) = (1.333, 2.358, 3.679) \tag{31}$$

である。例えば図中の

$$g_0: (a_0, b_0, c_0) = (1, 3, 0.5) \tag{32}$$

を初期物体としたときの最初の数回の出力物体の位置を黒丸で示しているが、この場合 g_{s2} に収束して停滞していることがわかる。 $2 \times 2L$ 型物体の場合、初期物体が正の実数で構成される物体である場合には、ER の収束物体はこの図に示すように高々四つであることを以前の報告で示した⁵⁾。このようにすべての収束物体を知ることができることは、アルゴリズムの検討に非常に有益である。図中の破線は、三つの最高周波数のフーリエ振幅 $|G(2, 0)|$, $|G(0, 2)|$, $|G(2, 2)|$ の内のいずれかがゼロとなる物体の位置を示している。以前の報告で示したようにこの物体の近傍で勾配ベクトル $\partial(\epsilon_F^2)/\partial g(x, y)$ が不

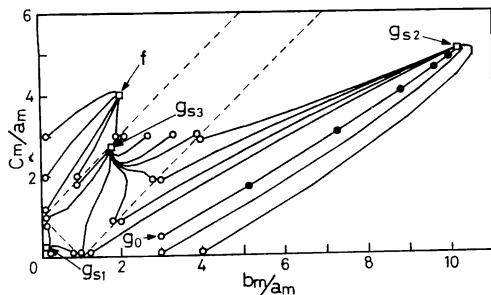


Fig. 4 Behavior of ER in the case where the original object is $f: (a, b, c) = (1, 2, 4)$.

連続に変化することが主要な原因となって、ER ではこの物体の位置が収束物体の違いを分ける境界となっている⁵⁾。

次に同じ原物体であるときに、HIO を β を小さくして用いた場合の挙動を調べる。Fig. 5 に β を 0.02 としたときの HIO の挙動を示す。初期物体は Fig. 4 で g_0 として示した物体である。IHIO が繰返しの途中で最初に到達する出力停滞物体の違いによって任意の初期物体を分類した場合、IHIO は GER の収束物体をたどって出力停滞状態に到達するのであるから、ER の時と同様に $|G(2, 0)|$, $|G(0, 2)|$, $|G(2, 2)|$ のうちのいずれかがゼロとなる物体の位置が境界となって部分空間を形成することが予想される。ただし HIO の入力物体はサポート外においてもゼロ以外の値を有するので部分空間の境界は N^2 次元空間に広がっている。そこで物体のサポート外の情報はマークを用いて表すことにする。すなわち Fig. 5 の \circ, ∇, \triangle は各々、出力停滞物体 g'_{s2}, g'_{s3} および原物体 f が存在している部分空間に物体が存在している場合の印であり、各々の部分空間を R_2, R_3, R_4 と呼ぶことにする。Fig. 5 から、HIO は各々の部分空間において出力停滞状態に到達し、出力停滞物体が解でない場合には ER を用いた場合には不可能な脱出を行ってまた新たに出力停滞状態をめざす、という挙動を繰返し最終的に原物体に収束していることがわかる。Fig. 6 に正規化したオブジェクトエラー E_{Om} :

$$E_{Om} = \left[\frac{\epsilon_{Om}^2}{N^{-2} \sum_{u,v} |F(u, v)|^2} \right]^{1/2} \tag{33}$$

の繰返し回数に対する変化を示す。各部分空間において E_{Om} はほぼ単調に減少して停滞するが、出力停滞状態から脱出したとたんに大きく変化していることがわかる。このときの入力物体の変化、および HIO が IHIO 的

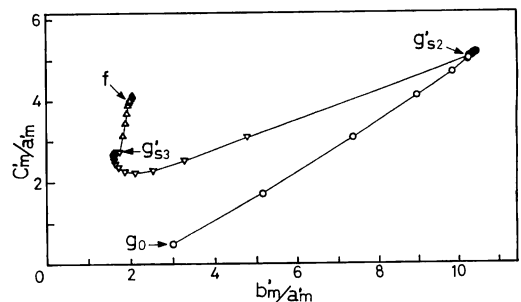


Fig. 5 Behavior of HIO in the case where the original object is $f: (a, b, c) = (1, 2, 4)$, initial start is $g_0: (a_0, b_0, c_0) = (1, 3, 0.5)$, and $\beta = 0.02$. g'_{s2} and g'_{s3} are output stagnation objects.

挙動をしているかどうかを知るために、各繰返しごとの入力物体と出力物体のサポート内における偏差の自乗和 S_m :

$$S_m = \sum_{(x,y) \in D} [g_m(x,y) - g'_m(x,y)]^2 \quad (34)$$

および入力物体のサポート外の値のエネルギー W_m :

$$W_m = \sum_{(x,y) \notin D} [g_m(x,y)]^2, \quad (35)$$

を Fig. 7 に示す。 S_m は各部分空間において単調に減少したあと(16)式を満たすようにゼロに近い値にとどまっており、HIO が GER の収束物体に到達したあと GER の収束物体をたどりながら出力停滞状態に到達するという挙動を示していることがわかる。また W_m の変化から、出力停滞状態にあるときも入力物体のサポート外の値は変化し続けていることがわかる。これらのことは、フィードバック定数 β が十分小さい値であれば、前章で議論した IHIO の挙動すなわち出力停滞状態への到達とそれからの脱出という挙動を HIO が示すことを表していると言うことができる。

HIO の挙動が β の値の違いによってどのように変化するかを調べる。 Fig. 5 と同じ原物体、同じ初期物体で、 $\beta=0.1$ および $\beta=1.0$ とした場合の HIO の挙動を Fig. 8 および Fig. 9 に示す。また各々の場合の E_{om} の変化を Fig. 10 に示す。 $\beta=0.1$ の場合、出力停滞状

態に完全に到達しているわけではないが、HIO の挙動は Fig. 5 とほぼ同様であるとみなすことができる。また Fig. 10 から収束に必要な繰返し回数が非常に少なくなっていることがわかる。とくに出力停滞状態から脱出するために必要な繰返し回数の減少が顕著である。一方 $\beta=1.0$ とした場合、 $\beta=0.1$ のときよりさらに少ない繰返し回数で解に収束しているが、出力停滞状態に達する以前に部分空間を出入りしており、IHIO 的挙動を示しているとは言えず、その挙動は不安定である。これらのことが原物体の違いによってどのように変わるかを見るために、初期物体は Fig. 5 と同じにして、原物体を

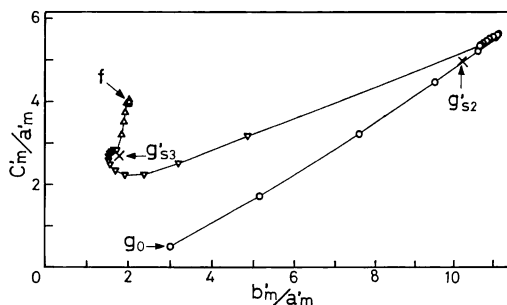


Fig. 8 Behavior of HIO in the case where $\beta=0.1$.

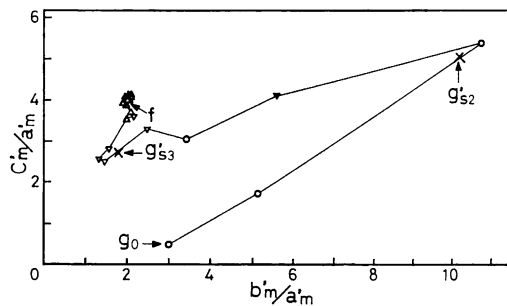


Fig. 9 Behavior of HIO in the case where $\beta=1.0$.

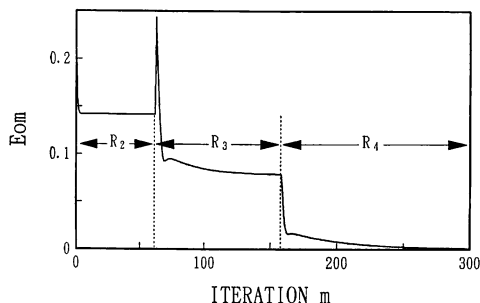


Fig. 6 E_{om} vs the number of iterations for Fig. 5.

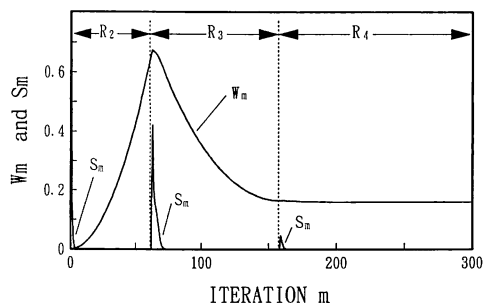


Fig. 7 W_m and S_m vs the number of iterations for Fig. 5.

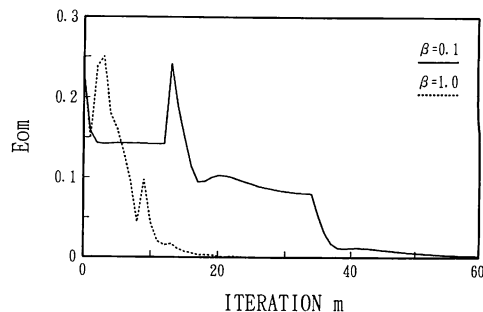


Fig. 10 E_{om} vs the number of iterations for Fig. 8 and Fig. 9.

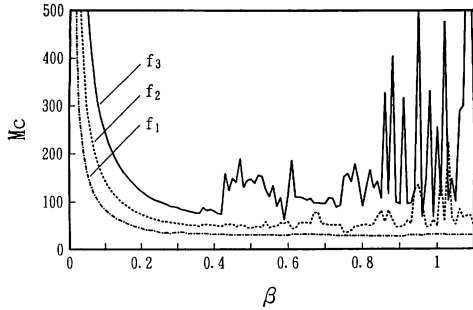


Fig. 11 M_c vs β . The original object is $f_1: (a, b, c)=(1, 2, 4)$, or $f_2: (a, b, c)=(1, 2, 10)$, or $f_3: (a, b, c)=(1, 2, 20)$. Initial start is g_0 shown in Fig. 5

$$f_1: (a, b, c)=(1, 2, 4) \quad (36)$$

$$f_2: (a, b, c)=(1, 2, 10) \quad (37)$$

$$f_3: (a, b, c)=(1, 2, 20) \quad (38)$$

と種々変えて β を 0.01 から 0.01 ずつ 1.1 まで変化させたときに、HIO が収束して E_{om} が 10^{-4} 未満となるために必要な繰返し回数 M_c を **Fig. 11** に示す。ただし M_c が 500 回以上となる場合は示していない。原物体によらず β が 0.3 位までは β が大きくなるにしたがって収束に必要な繰返し回数が減少しており、出力停滞状態から脱出するために必要な回数の減少が強く影響していることがわかる。ところが β をさらに大きくすると、原物体が f_1 であるときは β が 0.3 以上で収束に必要な繰返し回数はほぼ一定であると判断できるが、原物体が f_2, f_3 と部分空間の境界から遠くなるにしたがって、 β が大きくなるにともない収束に必要な回数が大きく変動して不安定になっていることがわかる。特に f_3 では β が 0.4 以上で極めて不安定となっている。すなわち **Fig. 9** とあわせて考えると、HIO が IHIO 的挙動を示さなくなるほどに β が大きい場合、原物体の位置によっては、なかなか解に到達できなくなるという危険性を招くと言うことができる。以上のことから、 β を大きくすることは解への収束の保証に問題を生じるので β は小さくしなければならぬが、一方において β を極めて小さくしなくても 1 に比べて十分小さい値にすれば出力停滞状態への到達とそれからの脱出という IHIO 的挙動が保証されることが考えられる。われわれはシミュレーションの結果から β の値として 0.2 前後が適切ではないかと考えている。

5. ま と め

HIO に対して、物体領域の拘束条件にサポート条件

のみを用い、フィードバック定数 β を 1 に比べて十分小さい値にして単独で実行するならば、HIO は解に収束する能力を有するアルゴリズムであることを示した。これは ER とは根本的に異なる点であり、したがって HIO は従来考えられてきた以上に強力なアルゴリズムである。HIO においてアルゴリズムが不動状態となるのは、ER とは異なって出力物体が解の時だけである。さらに HIO においては入力物体は繰返しごとに変化しているけれども出力物体は停滞しているという状態が存在する。この状態をアルゴリズムの不動状態も含めて出力停滞状態と呼ぶことにした。

任意の物体を初期物体に選んで β を非常に小さくして HIO を用いた場合に、最初に到達する出力停滞状態における出力停滞物体の違いによって N^2 次元空間を部分空間に分割することができる。 β をゼロに近づけた極限での HIO すなわち IHIO は、この各部分空間内で GER の収束物体に到達したあと GER の収束物体をたどりながら出力停滞状態に到達する。このとき出力停滞物体が解でない場合は、出力物体が停滞している間も入力物体のサポート外の値が変化し続けて、入力物体のフーリエ位相が少なくとも一つの周波数で出力停滞物体のフーリエ位相と π (rad) 異なるという状況に達し出力停滞状態から脱出する。IHIO はこの出力停滞状態への到達とそれからの脱出という挙動を繰返ししながら、解の存在する部分空間に達して解に収束する。

このことを受けて $2 \times 2L$ 型物体に対する数値シミュレーションによって具体的に HIO の挙動を調べた。HIO は β が小さくなるほど IHIO 的挙動を明確に示し、解への収束も確実となる。しかし β が小さくなるほど出力停滞状態からの脱出に多くの繰返し回数が必要となるようになる。一方 β を大きくするにしたがって HIO は IHIO 的挙動を示さなくなり、出力物体が出力停滞物体に到達する以前に入力物体が部分空間を飛び出すという状況が頻繁に起こり始める。したがって β をあまり大きくし過ぎると HIO の挙動は非常に不安定となり、なかなか解に到達できなくなるという状況を生じやすい。われわれはシミュレーションの結果から β の値として 0.2 前後の値が適切ではないかと考えているが、解への収束の安全性を得るために収束の速さを少し犠牲にしても良いならば、 β はなるべく小さい値にすべきである。

大規模物体においてサポートがほとんどわかっていない場合のように物体領域の拘束条件がゆるい場合には、たとえ β の値が適切であっても出力停滞物体の数が増えるため解以外の出力停滞物体にとらえられることが多く

なり, 収束に必要な繰返し回数が増加することが予想される。物体領域の拘束条件がゆるい場合の収束の速さの問題は HIO の使用に当たったの大きな問題であり今後の検討課題である。

文 献

- 1) J. R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: a comparison," Appl. Opt., **21** (1982) 2758-2769.
- 2) J. R. Fienup and C. C. Wackerman: "Phase-retrieval stagnation problems and solutions," J. Opt. Soc. Am. A, **3** (1986) 1897-1907.
- 3) M. Nieto-Vesperinas, R. Navarro and F. J. Fuentes: "Performance of a simulated-annealing algorithm for phase retrieval," J. Opt. Soc. Am. A, **5** (1988) 30-38.
- 4) 高城洋明, 待鳥誠範, 高橋 徹, 永野直広: "繰返し型位相回復アルゴリズムの停滞に関する一考察", 光学, **20** (1991) 607-611.
- 5) 高橋 徹, 高城洋明, 待鳥誠範, 永野直広: "繰返し型位相回復アルゴリズムにおける停滞問題の数値シミュレーションによる考察", 光学, **21** (1992) 119-127.
- 6) 高橋 徹, 高城洋明: "繰返し型位相回復アルゴリズムにおける停滞問題の克服", 光学, **21** (1992) 485-488.
- 7) Yu. M. Bruck and L. G. Sodin: "On the ambiguity of the image reconstruction problem," Opt. Commun., **30** (1979) 304-308.

付録A GER における ϵ'_{om^2} と ϵ_{F^2} の単調減少性

ϵ'_{om^2} の定義(14)式に(12)式を用いると

$$\epsilon'_{om^2} = \sum_{x,y} [g'_m(x,y) - g_{m+1}(x,y)]^2 \quad (A1)$$

となる。パーセバルの定理により(A1)式は

$$\epsilon'_{om^2} = N^{-2} \sum_{u,v} |G'_m(u,v) - G_{m+1}(u,v)|^2 \quad (A2)$$

となる。ここで $G'_m(u,v)$ と $G_{m+1}(u,v)$ の振幅は $|F(u,v)|$ に等しく, $G_{m+1}(u,v)$ の位相は $G_{m+1}(u,v)$ の位相に一致するので, 任意の u,v に対して

$$\begin{aligned} & |G'_m(u,v) - G_{m+1}(u,v)| \\ & \geq |G_{m+1}(u,v) - G_{m+1}(u,v)| \end{aligned} \quad (A3)$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} \epsilon'_{om^2} & \geq N^{-2} \sum_{u,v} |G_{m+1}(u,v) \\ & - G_{m+1}(u,v)|^2 = \epsilon_{F_{m+1}^2} \end{aligned} \quad (A4)$$

である。一方(14)式から明らかに

$$\epsilon'_{om^2} \leq \sum_{x,y} [g'_{m+1}(x,y) - g_{m+1}(x,y)]^2 \quad (A5)$$

である。パーセバルの定理により, 右辺は $\epsilon_{F_{m+1}^2}$ に等しい。したがって, (A4)式と合わせると

$$\epsilon'_{om^2} \geq \epsilon_{F_{m+1}^2} \geq \epsilon'_{om^2} \quad (A6)$$

となる。

付録B $G'_m^D(u,v)$ の表式の導出

ϵ_{om^2} は(5)式から

$$\begin{aligned} \epsilon_{om^2} & = \sum_{(x,y) \in D} [N^{-2} \sum_{u,v} |F(u,v)| \\ & \cdot \exp\{i\theta_m(u,v)\} \exp\{i2\pi(ux+vy)/N\} \\ & \times N^{-2} \sum_{u',v'} |F(u',v')| \exp\{i\theta_m(u',v')\} \\ & \cdot \exp\{i2\pi(u'x+v'y)/N\}] \end{aligned} \quad (B1)$$

と表すことができる。したがって ϵ_{om^2} のフーリエ位相に対する微係数は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\epsilon_{om^2})}{\partial\theta_m(u,v)} & = 2N^{-2} \sum_{(x,y) \in D} [iG'_m(u,v)\{g'_m(x,y)\}^* \\ & \cdot \exp\{i2\pi(ux+vy)/N\} \\ & - i\{G'_m(u,v)\}^*g'_m(x,y) \\ & \cdot \exp\{-i2\pi(ux+vy)/N\}] \end{aligned} \quad (B2)$$

となることを導くことができる。ただし*は複素共役を表すものとする。ここで

$$\begin{aligned} & \sum_{(x,y) \in D} g'_m(x,y) \exp\{-i2\pi(ux+vy)/N\} \\ & = G'_m(u,v) - G'_m^D(u,v) \end{aligned} \quad (B3)$$

と表すことができるので, これを(B2)式に用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\epsilon_{om^2})}{\partial\theta_m(u,v)} & = 4N^{-2} \text{Im}[G'_m(u,v)\{G'_m^D(u,v)\}^*] \end{aligned} \quad (B4)$$

となることが導かれる。ただし $\text{Im}[\cdot]$ は $[\cdot]$ の虚数部分である。このことから $\theta_m(u,v)$ に対する2階の微係数も導くことができ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\epsilon_{om^2})}{\partial(\theta_m(u,v))^2} & = 4N^{-2} \text{Re}[G'_m(u,v)\{G'_m^D(u,v)\}^*] \\ & - 4N^{-2} |F(u,v)|^2 [N_D/N^2 \\ & + N^{-2} \sum_{(x,y) \in D} \cos\{2\theta_m(u,v) \\ & + 4\pi(ux+vy)/N\}] \end{aligned} \quad (B5)$$

となる。ただし $\text{Re}[\cdot]$ は $[\cdot]$ の実数部分である。また N_D は D に含まれるサンプル点の個数である。(B4), (B5)式から $G'_m^D(u,v)$ は,

$$\begin{aligned} G'_m^D(u,v) & = G'_m(u,v) [N_D/N^2 \\ & + N^{-2} \sum_{(x,y) \in D} \cos\{2\theta_m(u,v) \\ & + 4\pi(ux+vy)/N\}] \\ & + G'_m(u,v) \frac{N^2}{4|F(u,v)|^2} \frac{\partial^2(\epsilon_{om^2})}{\partial(\theta_m(u,v))^2} \\ & - iG'_m(u,v) \frac{N^2}{4|F(u,v)|^2} \frac{\partial(\epsilon_{om^2})}{\partial(\theta_m(u,v))} \end{aligned} \quad (B6)$$

となることが導かれる。