



レンズ自動設計の境界条件保持手法の 改良および数値比較検討

松 居 寛

キャノン(株)イメージング研究所 〒146 東京都大田区下丸子 3-30-2

(1993年1月25日受付, 1993年5月14日受理)

Analytical Improvements and Numerical Comparison of Four Different Methods to Solve Constrained Automatic Lens Design Problems

Hiroshi MATSUI

Imaging Research Center, Canon Inc.,
3-30-2, Shimomaruko, Ohta-ku, Tokyo 146

(Received January 25, 1993; Accepted May 14, 1993)

Four different methods to solve nonlinear constrained optimization problems (the penalty function method, the Lagrange's method of undetermined multipliers, the multiplier method and the quasi-Newton method) are presented. Several improvements on algorithms to calculate matrices and an initial damping factor are discussed and numerical comparison of these methods is also given. As a conclusion, the quasi-Newton method is found to be more effective than others. The results of the study are reported.

1. はじめに

レンズ自動設計が実用化されて20年以上経つが、その境界条件の処理についてはまだまだ不満足な点が多い。例えば、結像性能とトレードオフの関係にあるレンズ系の小型化を極限まで追求しようとする際、境界条件を適切に処理しないとレンズ肉厚が負になったり、コバ厚が十分取れなかったりして製造不可能なレンズ系が設計されるおそれがある。したがって、境界条件をいかに巧みに処理するかが効率の良いレンズ自動設計プログラム開発のテーマの一つである。

これまでレンズ自動設計で用いられてきた境界条件処理手法は、Carrollら^{1,2)}により提案されたいわゆるペナルティ関数法³⁻⁶⁾とLagrange未定乗数法⁷⁻¹¹⁾である。一方、非線形計画法の分野では上記以外に、変換法に属しHestenesら^{12,13)}による乗数法と、射影法に属しHanら^{14,15)}により研究が進められた準ニュートン法が知られている。

ペナルティ関数法は、境界条件のない場合の最適化手法をそのまま利用できるため適用範囲が広いといった利点がある反面、収束が遅いことなどの欠点があると言われる。また、Lagrange未定乗数法は基本的には不等式境界条件に対応できない。そして乗数法および準ニュートン法の計算アルゴリズムは前記2法より複雑で、大規模な問題への適用例は少なく、レンズ設計問題へ適用を試みた例は皆無である。

本論は、ペナルティ関数法、Lagrange未定乗数法、乗数法そして準ニュートン法をそれぞれレンズ設計問題に適用する。その際、行列演算およびダンピングファクタ算定に関して幾つかの数値計算上の改良を加える。そして、数値モデル実験を行い、4方法の能力の比較を行うものである。

2. レンズ設計の定式化

まずレンズ系の構成要素を変数ベクトル;

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T \quad (1)$$

レンズ系の特性を評価する量を評価関数ベクトル;

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})=[F_1(\mathbf{X}), F_2(\mathbf{X}), \dots, F_m(\mathbf{X})]^T \quad (2)$$

と表す。ここで、

$$F_i(\mathbf{X})=w_{fi} \{f_i(\mathbf{X})-f_{i, tar}\} \quad (3)$$

である。(3)式で $f_i(\mathbf{X})$, $f_{i, tar}$ はそれぞれ評価関数の実際の値とその目標値, w_{fi} はあらかじめ設計者が与える各評価関数にかかるウェイトである。なお, 上付 T は行列の転置を意味する。さらに, レンズ系が満たすべき物理的あるいは仕様上の制約を, 等号境界条件ベクトル;

$$\mathbf{H}(\mathbf{X})=[H_1(\mathbf{X}), H_2(\mathbf{X}), \dots, H_k(\mathbf{X})]^T=0 \quad (4)$$

ここで、

$$H_i(\mathbf{X})=w_{hi} \{h_i(\mathbf{X})-h_{i, b.c.}\} \quad (5)$$

および, 不等号境界条件ベクトル;

$$\mathbf{G}(\mathbf{X})=[G_1(\mathbf{X}), G_2(\mathbf{X}), \dots, G_l(\mathbf{X})]^T \leq 0 \quad (6)$$

ここで、

$$G_i(\mathbf{X})=w_{gi} \{g_i(\mathbf{X})-g_{i, b.c.}\} \quad (7)$$

と表す。なお, $h_i(\mathbf{X})$, $g_i(\mathbf{X})$ および $h_{i, b.c.}$, $g_{i, b.c.}$ は各々境界条件を表す関数の実際の値とそれらの条件値, w_{hi} , w_{gi} は各々あらかじめ与えるウェイトである。これらの諸量を用いるとレンズ設計における収差補正は

$$\text{Minimize } \mathbf{F}(\mathbf{X})=[F_1(\mathbf{X}), F_2(\mathbf{X}), \dots, F_m(\mathbf{X})]^T \quad (8)$$

subject to

$$\mathbf{X} \in X = \{\mathbf{X} \in E^n | \mathbf{H}(\mathbf{X})=0, \mathbf{G}(\mathbf{X}) \leq 0\} \quad (9)$$

なる多目的非線形計画問題として定式化される。

次に, 上記 (8), (9)式に評価関数の自乗和から構成される単一評価尺度 (メリット関数) を導入し, スカラー化を計ると問題は

$$\text{Minimize } \phi(\mathbf{X})=\mathbf{F}^T(\mathbf{X})\mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (10)$$

subject to

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{X})=0 \quad (12)$$

となる。なお, レンズ自動設計で広く用いられている DLS 法 (damped least squares 法) の場合には, メリット関数を (10)式にダンピング項を付加して次のように置く。

$$\phi(\mathbf{X})=\mathbf{F}^T(\mathbf{X})\mathbf{F}(\mathbf{X})+\rho[\Delta\mathbf{X}]^T[\Delta\mathbf{X}] \quad (13)$$

ここで, ρ はダンピングファクタを表す。

3. 境界条件保持手法

3.1 ペナルティ関数法

ペナルティ関数法は収差組み込み法とも言われ, 不等号および等号境界条件を評価関数に含めて取り扱う方法

である。すなわち, メリット関数を (13)式の代わりに

$$\phi(\mathbf{X})=\mathbf{F}^T(\mathbf{X})\mathbf{F}(\mathbf{X})+\rho[\Delta\mathbf{X}]^T[\Delta\mathbf{X}] + \mathbf{G}^{*T}(\mathbf{X})\mathbf{G}^*(\mathbf{X})+\mathbf{H}^T(\mathbf{X})\mathbf{H}(\mathbf{X}) \quad (14)$$

とする。ここで $\mathbf{G}^*(\mathbf{X})$ はその要素が以下で与えられるベクトルである。

$$\mathbf{G}^*_i(\mathbf{X})=\max \{0, G_i(\mathbf{X})\} \quad (15)$$

評価関数と不等号および等号境界条件の Jacobi 行列をそれぞれ \mathbf{A} , \mathbf{B}^* , \mathbf{C} で表し, さらに線形近似

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})=\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)+\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} \quad (16)$$

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{X})=\mathbf{G}^*(\mathbf{X}_0)+\mathbf{B}^*\Delta\mathbf{X} \quad (17)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{X})=\mathbf{H}(\mathbf{X}_0)+\mathbf{C}\Delta\mathbf{X} \quad (18)$$

を考慮して (14)式で与えられるメリット関数を最小化すると以下を得る。

$$[\mathbf{A}^T\mathbf{A}+\mathbf{B}^{*T}\mathbf{B}^*+\mathbf{C}^T\mathbf{C}+\rho\mathbf{I}]\Delta\mathbf{X} = -[\mathbf{A}^T\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)+\mathbf{B}^{*T}\mathbf{G}(\mathbf{X}_0)+\mathbf{C}^T\mathbf{H}(\mathbf{X}_0)] \quad (19)$$

この (19)式を $\Delta\mathbf{X}$ について解くことにより最適解が得られる。その際, (19)式の左辺に固有値分解, 右辺に特異値分解をそれぞれ適用すれば逆行列演算を行わずに解を求めることができ¹⁶⁾, また得られる固有値を調べて値の著しく小さい成分を強制的にゼロとすれば従属変数を除去することができる。さらには, われわれが提案¹⁷⁾した DLS 法における最適な ρ 初期値設定方法をそのまま使うことが可能となる。

3.2 Lagrange 未定乗数法

不等号境界条件 $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ を, その要素が (15)で与えられるような $\mathbf{G}^*(\mathbf{X})$ に置き換えることにより, 等号境界条件として扱え, Lagrange 未定乗数法が使えるようになる。以下で表される Lagrange 関数 $L(\mathbf{X}, \lambda, \mu)$ を用いる。

$$L(\mathbf{X}, \lambda, \mu)=\phi(\mathbf{X})+\lambda^T\mathbf{G}^*(\mathbf{X})+\mu^T\mathbf{H}(\mathbf{X}) \quad (20)$$

なお, (20)式の $\phi(\mathbf{X})$ は (13)式で与えられるメリット関数で, λ , μ はそれぞれ不等号, 等号境界条件にかかる乗数ベクトルを表す。このとき, 境界条件を成立させながら $\phi(\mathbf{X})$ が局所的な最小点をもつための必要条件は

$$\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{X}, \lambda, \mu)=0 \quad (21)$$

$$\nabla_{\lambda}L(\mathbf{X}, \lambda, \mu)=0 \quad (22)$$

$$\nabla_{\mu}L(\mathbf{X}, \lambda, \mu)=0 \quad (23)$$

である。これら (21)~(23)を線形近似 (16)~(18)を用いて行列の形に書き下せば、

$$\mathbf{E}\Delta\mathbf{Y}=\mathbf{T} \quad (24)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{A}+\rho\mathbf{I} & \mathbf{B}^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\Delta Y \equiv [\Delta X \lambda \mu]^T \quad (26)$$

$$T \equiv -[A^T F(X_0) \quad G^*(X_0) \quad H(X_0)]^T \quad (27)$$

である。これを解いて解ベクトル ΔX , 乗数 λ , μ が得られる。

なお, (24)式を解く際, 行列 E の逆行列演算が必要となる。しかし, 境界条件保持領域では, 行列 B, C の要素がゼロとなる場合が多いため, 行列 E のある列または行が揃ってゼロとなり単純な反復計算法では逆行列が求められないことが頻発する。そこで, 数値計算上直接逆行列を計算しないで(24)式の解を求める方法が必要となる。そのためには, (25)式で与えられる対称行列 E を固有値分解し, 得られる固有値および直交行列の性質を用いればよい。また, そうすれば, 各変数に対して先のペナルティ関数法の場合と同様の処理が行える。

3.3 乗数法

乗数法では, ペナルティ関数法の欠点を改善するために, Lagrange 関数にペナルティ項を付加した拡張 Lagrange 関数

$$\begin{aligned} L_a(X, \lambda, \mu, r, t) \\ = \phi(X) + \lambda^T G(X) + \mu^T H(X) \\ + t G_a^T(X) G_a(X) + r H^T(X) H(X) \end{aligned} \quad (28)$$

を用いる。ここで, $\phi(X)$ は(13)式で与えられるメリット関数, $G_a(X)$ は, 不等号境界条件 $G(X)$ にスラック変数を導入することにより変換された等号境界条件

$$G_a(X) = 0 \quad (29)$$

であり, その要素は

$$G_{a,i}(X) = \max \{G_i(X), -\lambda_i/t\} \quad (30)$$

と表される。また, t, r はそれぞれ不等号, 等号境界条件にかかるペナルティパラメータである。このとき, 拡張 Lagrange 関数を最小化する局所的最適解 X が存在するための必要条件は

$$\nabla_X L_a(X, \lambda, \mu, r, t) = 0 \quad (31)$$

となる。(31)を(16)~(18)と同様に線形近似した $F(X)$, $G_a(X)$, $H(X)$ を用いて書き下せば

$$\begin{aligned} [A^T A + t B^*{}^T B^* + r C^T C + \rho I] \Delta X \\ = -[A^T F(X_0) + t B^*{}^T G_a(X_0) + r C^T H(X_0) \\ + B^*{}^T \lambda/2 + C^T \mu/2] \end{aligned} \quad (32)$$

となる。これを解けば解ベクトル ΔX が得られる。そして, 乗数 λ , μ , およびペナルティパラメータ r, t の更新値は, 一般に最急上昇法を用いて求められる。

一方,

$$E^* = [A \quad \sqrt{t} B^* \quad \sqrt{r} C]^T \quad (33)$$

とおくと, (32)式左辺は

$$[E^*{}^T E^* + \rho I] \Delta X \quad (34)$$

と書き換えられる。したがって, (34)式に固有値分解, (32)式の右辺に特異値分解をそれぞれ適用すれば, 先のペナルティ関数法の場合と同様の処理が行える。そして, r, t 更新の都度 $E^*{}^T E^*$ の固有値分布を調べれば, ρ に関する一次元探索において最適な初期値 ρ_0 を見積もることができる¹⁷⁾。また, r, t の初期値に対して最適な ρ_0 値を見いだされていれば, 以降の反復計算では毎回固有値を求め直さなくても, 以下の手続きによって ρ_0 を補正することができる。

今, r, t の初期値に対する $n \times n$ 行列 $E_0^*{}^T E_0^*$ の n 個の固有値を

$$s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n} \quad (35)$$

$E_0^*{}^T E_0^*$ の n 個の対角要素を

$$e_{011}, e_{022}, \dots, e_{0nn} \quad (36)$$

とすると,

$$s_{01} + s_{02} + \dots + s_{0n} = e_{011} + e_{022} + \dots + e_{0nn} \equiv \text{sum}_0 \quad (37)$$

なる関係がある。この性質を使えば, r, t の第 i 回目の更新時に $E_i^*{}^T E_i^*$ の n 個の対角要素の和;

$$e_{i11} + e_{i22} + \dots + e_{inn} \equiv \text{sum}_i \quad (38)$$

を求めることにより, 固有値総和の変化量を知ることができる。そして, r, t の第 i 回目の更新時の ρ 初期値を ρ_{0i} とおくと

$$\rho_{0i} = \rho_0 \times \text{sum}_i / \text{sum}_0 \quad (39)$$

とすることにより, 毎回固有値分布を求め直さなくても, r, t の変動に伴う最適な ρ_0 を補正することができる。この方法は各ステップで評価関数と境界条件に関する Jacobi 行列を厳密に求めているため, 系の非線形性には依存しない。

3.4 準ニュートン法

境界条件付き最適化問題(10)~(12)に対して, メリット関数(10)と境界条件によって構成される Lagrange 関数

$$L(X, \lambda, \mu) = \phi(X) + \lambda^T G(X) + \mu^T H(X) \quad (40)$$

を用いると, その最適化問題に対する Kuhn-Tucker 条件は

$$\nabla_X L(X, \lambda, \mu) = 0 \quad (41)$$

$$A G(X) = 0 \quad (42)$$

$$H(X) = 0 \quad (43)$$

$$G(X) \leq 0 \quad (44)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (45)$$

となる。ここで, A はその要素が $\lambda_1 \sim \lambda_i$ の対角行列である。これらの内の等号条件(41)~(43)を連立非線形方程式とみなし, 準ニュートン法で解くことにより最適解を求める。Lagrange 関数の Hesse 行列に対する近似行

列を D , $G_1(X_0) \sim G_l(X_0)$ を要素とする対角行列を G^+ と表すと, 解ベクトルおよび各乗数は以下の式を解くことによって得られる.

$$\begin{bmatrix} D & B^T & C^T \\ AB^T & G^+ & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x \phi(X_0) \\ 0 \\ H(X_0) \end{bmatrix} \quad (46)$$

(46)式における近似行列 D は, 修正 DFP 公式または修正 BFGS 公式によって更新すれば, その正定性は保障される¹⁹⁾. なお, (46)式の左辺に特異値分解を適用すれば, 先の Lagrange 未定乗数法の場合と同様の解計算に伴う処理が行える.

4. 各手法の比較数値実験

われわれは, ペナルティ関数法, Lagrange 未定乗数法, 乗数法, 準ニュートン法の四つの境界条件保持手法の能力を比較するために薄肉レンズモデルを用いて実験を行った.

4.1 実験モデル

実験に用いたレンズモデルは Fig. 1 に示すような薄肉ダブレット (2枚レンズ) である. なお Fig. 1 ではレンズ断面を見やすくする目的でレンズに厚みをつけてあるが, 実際の計算では面間隔およびレンズ肉厚はすべてゼロとしてある. このレンズモデルの変数としては四つの面の曲率半径 $r_1 \sim r_4$ である. そのうち r_2 を薄肉色収差係数がゼロとなる条件¹⁹⁾;

$$\phi_1/\nu_1 + \phi_2/\nu_2 = 0 \quad (47)$$

ϕ_i : 第 i レンズの屈折力

ν_i : 第 i レンズのアッベ数

を満たすように選び, また r_4 を全系の焦点距離が正確に 1 となるように選んだので, 残りの二つ r_1, r_3 が変数ということになる. 評価関数として, Seidel の 3 次収差係数の内の球面収差係数 I とコマ収差係数 II の二つを

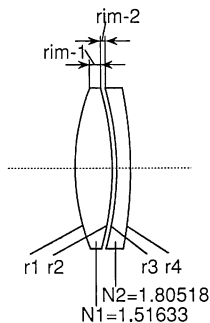


Fig. 1 Thin lens model used for the experiment.

選び, 各々の目標値を I_t, II_t およびそれらにかかるウェイトを w_a, w_b とすれば, メリット関数 ϕ は

$$\phi = \{w_a(I - I_t)\}^2 + \{w_b(II - II_t)\}^2 \quad (48)$$

より求められる. われわれが実験に使用した各パラメータ値は

$$I_t = 0, II_t = 0, w_a = 10, w_b = 10 \quad (49)$$

である. このとき, 二つの変数 r_1, r_3 の値に対するメリット関数値を (48) 式から計算して地形図の等高線を描いたものが Fig. 2, 鳥瞰図が Fig. 3 である. この問題で $\phi = 0$ となる解は 2 点あり, 座標 $(1/r_1, 1/r_3)$ で表して

$$\text{解 1: } (4.12269, 4.98629) \quad (50)$$

$$\text{解 2: } (1.64547, -1.68967) \quad (51)$$

である. 一方, 境界条件としては Fig. 1 に示すように 2 箇所のレンズコバ厚が以下の値となるように不等号境界条件制約を設定した.

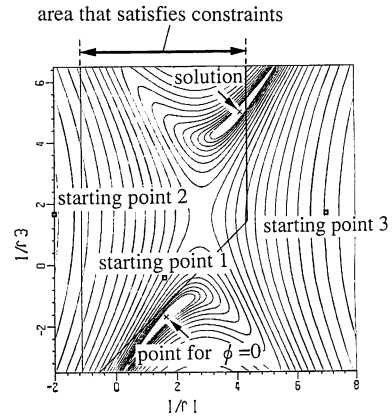


Fig. 2 Design space of thin lens model with Seidel-aberrations merit function (a contour map).

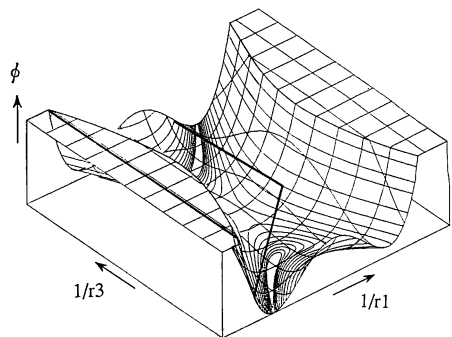


Fig. 3 Design space of thin lens model with Seidel-aberrations merit function (a bird's-eye view).

$$\text{コバ厚 } 1 \geq -0.028, \text{ コバ厚 } 2 \geq 0.002 \quad (52)$$

薄肉レンズにコバ厚を設定することは物理的に意味がないが、ここでは境界条件付きのモデル実験を行うため便宜的に導入したものである。この境界条件が保持される領域を図示したのが Fig. 2 の矩形内領域である。なお、実験に先立ち出発点を

$$\text{出発点 1: } (1.60395, -0.40760) \quad (53)$$

$$\text{出発点 2: } (-2.0, 1.66667) \quad (54)$$

$$\text{出発点 3: } (7.0, 1.66667) \quad (55)$$

の三つ選んだ。

4.2 実験結果

前節で説明したモデルを用いて最適化を実行し、各ステップの動きをメリット関数地形図上にプロットした。

Fig. 4 がペナルティ関数法, Fig. 5 が Lagrange 未定乗数法, Fig. 6 が乗数法, Fig. 7 が準ニュートン法による結果である。各図で、出発点を○印、途中のステッ

プの位置を○印、最終的に収束した地点を■印で示し、各々出発点から収束点までの各ステップを直線で結んだ。また、Fig. 4 のペナルティ関数法の場合、メリット関数分布は本来境界条件を含めて表示すべきであるが、他の手法と比較しやすいように評価関数のみによる項で等高線を図示した。

ペナルティ関数法で境界条件を厳密に保持するには原理的に境界条件にかかるウェイトを無限大にすることが望ましいと言われているため、本実験では十分大きな値を設定した。出発点 1 からの計算では境界条件保持領域の境界線上までは 1 ステップで移動するがそこからはほとんど改善せず、厳密に境界条件が満足された上でメリット関数が最小となる最適解を検出できなかった。それは出発点 2 からの計算でも同様であった。また出発点 3 からの計算では、境界条件が他と比べて大きく侵害されている領域から出発したため、境界条件保持領域まで

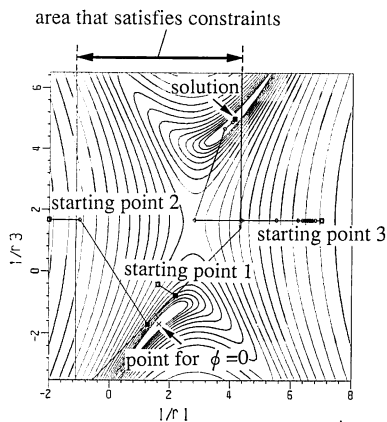


Fig. 4 Loci of design point obtained by the penalty function method.

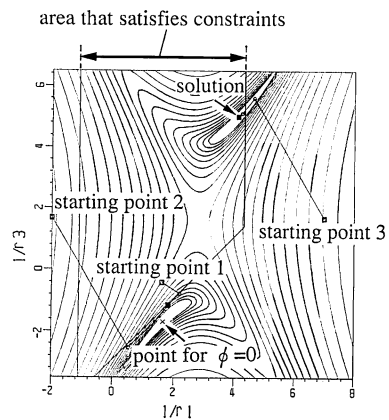


Fig. 6 Loci of design point obtained by the multiplier method.

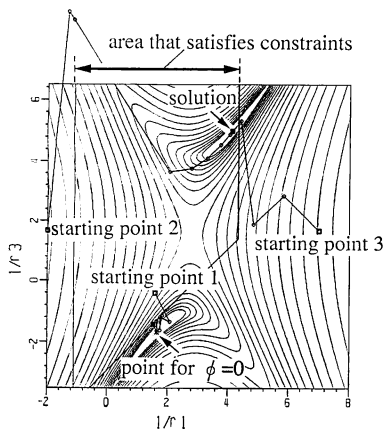


Fig. 5 Loci of design point obtained by the Lagrange's method of undetermined multipliers.

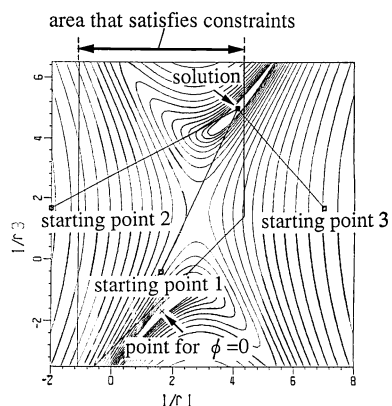


Fig. 7 Loci of design point obtained by the quasi-Newton method.

数多くの反復計算を要した。このように、ペナルティ関数法では、境界条件侵害領域で最適化収束効率が著しく低下するため、境界条件保持領域まで数多くのステップを要したり、境界線上で停滞してしまうことが裏付けられた。

Lagrange 未定乗数法は、ペナルティ関数法に比べれば、境界条件侵害領域でも収束効率が著しく低下することはない。しかし、Fig. 5 に示したとおり、出発点 1 からの計算では境界条件を満たさない $\phi=0$ の近傍の境界上で振動してしまったり、出発点 2, 3 からの第 1 ステップが最適解方向に対して迂回したりで、効率良く最適解に達しない場合があった。これらの現象については、次章で考察する。

乗数法の場合、Fig. 6 と Fig. 4, Fig. 5 とを比較すれば明らかのように前者二つの手法に比べて境界条件保持能力および収束効率の点で優れており、いずれの出発点からの計算でも、近傍の境界条件を保持しかつメリット関数が最小となる点を効率良く検出することがわかった。

さらに準ニュートン法においては、近似行列の更新にともなう内部的反復計算を要するものの、Fig. 7 からわかるようにいずれの出発点からも 1 ステップで最適解を検出しており、今回採用した境界条件保持手法の中では最も効率良いことが判明した。

4.3 考察

今回のモデル実験によって、これまでレンズ自動設計に適用されてきた Lagrange 未定乗数法でも最適解を効率良く検出できない場合があることが判明した。ここではその原因について考察する。

まず、出発点 1 からの計算では、境界条件が保持されている領域と侵害されている領域との間で振動を起していることがわかる。すなわち、不等号境界条件の場合、保持領域内では(15)式のように境界条件をフリーにするため純粋にメリット関数が最小となる地点を目指してステップが進むが、いったん求まった点で境界条件が侵害されている場合、次のステップで境界条件保持領域内に戻され、結果的に振動してしまう訳である。この現象は、Lagrange 未定乗数法は、原理的に等号境界条件に対してしか適用できないことを示していると言える。したがって、レンズ自動設計においても不等号境界条件が存在する場合に Lagrange 未定乗数法でそれを保持しようとするには無理があると判断できる。

一方、非線形計画法において、Lagrange 関数が Kuhn-Tucker 条件を満たす場合にそれが最適解になるために

は、対象となる問題が凸計画問題であることを前提としている²⁰⁾。Lagrange 関数を用いた場合、凸計画問題であれば、Lagrange 関数の \mathbf{X} に関する Hesse 行列は正定値行列となる。その Hesse 行列 $\nabla^2_{\mathbf{X}}L(\mathbf{X}, \lambda, \mu)$ を、今回採用した実験モデルに関して書き下せば、

$$\begin{aligned} \nabla^2_{\mathbf{X}}L(\mathbf{X}, \lambda, \mu) &= \mathbf{A}^T\mathbf{A} + \rho\mathbf{I} + \sum_{i=1}^m F_i(\mathbf{X})\nabla^2 F_i(\mathbf{X}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \lambda_j \nabla^2 G^*_j(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (56)$$

となる。そして、出発点 2, 3 から Lagrange 未定乗数法により最適化を実行した際、各ステップで(56)式が正定値行列となっているか否かを調べた。行列が正定値であるか否かの判定方法には幾つかあるが、今回は(56)式の部分行列の行列式がすべて正であるかどうかによって判定した。その結果、出発点 2, 3 からの計算では境界条件侵害領域でいずれのステップとも(56)式が正定値行列になっていないことがわかった。つまり、Lagrange 未定乗数法で最適化経路が迂回したのは、Lagrange 関数が Kuhn-Tucker 条件を満たしても、それが最適解であることを原理的に保証できない状態になっていたためであることが明らかになった。この点、拡張 Lagrange 関数を用いる乗数法では、Lagrange 関数に等号および不等号境界条件に関するペナルティ項が付加されているため、それらにかかるペナルティパラメータが反復計算で更新され十分大きな値になれば非凸な問題を局所的に凸化することができるため、Lagrange 未定乗数法における上記欠点が回避されていると考えられる。また、準ニュートン法においては、修正 BFGS 公式または修正 DFP 公式により Hesse 行列の近似行列を更新していくため原理的にその正定値性が保障されている。よって、レンズ設計問題においても非凸な問題が発生することが裏付けられたため、境界条件保持手法としては凸計画問題を前提とした Lagrange 未定乗数法よりも、拡張 Lagrange 関数を用いた乗数法、さらには原理的に行列の正定値性が保障されている準ニュートン法の方がより適していると言える。なお、出発点 1 からの挙動を見ると、準ニュートン法のみ最適解に到達している。これは、境界条件保持手法による差ではなく、準ニュートン法が DLS 法より極小値検出能力が優れていることを裏付ける結果であると判断できる。

5. まとめ

境界条件保持手法として、ペナルティ関数法、Lag-

range 未定乗数法, 乗数法, 準ニュートン法の四つを採用し, 実際の機能を作成するために, 次のような数値計算上の工夫を施した.

- (1) 行列の特異値分解や固有値分解を用いることにより, 逆行列演算の使用を避けるとともに, 従属な変数を除去して効率良く解が得られるようにした.
- (2) 境界条件に関する要素を含む Jacobi 行列で構成される行列の固有値分布とダンピングファクタとの相対的な関係から, 最適なダンピングファクタ初期値を設定することにより, 境界条件がない場合と同様のアプローチで, DLS 法の収束効率向上を図った.

さらに, 薄肉ダブレットモデルを用いたモデル実験によってそれらの能力比較を行った結果, 以下のことが明らかになった.

- (1) ペナルティ関数法では境界条件が侵害されている状態では収束効率が著しく悪くなり, 最適解が検出しにくくなるのが裏付けられた.
- (2) Lagrange 未定乗数法では, 対象とする問題が不等号境界条件を有していたり非凸な場合には原理的に最適解が得られない状態になることがわかった.
- (3) 境界条件保持能力および収束効率の点で, 乗数法および準ニュートン法が他の二つに比べ優れている. 本論の数値実験では準ニュートン法が最良であった.

これらのことから, レンズ自動設計の境界条件保持手法としては乗数法か準ニュートン法がより望ましいと言える.

一方, これらの境界条件保持手法を今回用いたような簡単なモデルだけでなく, もっと実際的なレンズ設計問題に適用する場合, 評価関数や変数の次元数が大幅に増加すること, 光学系特有の性質によって評価関数間のトレードオフや変数間に従属関係が生じやすくなることなどによって, 事情はかなり変わることが予想される. それに伴い, 特にこれまでレンズ自動設計への適用例がない乗数法と準ニュートン法では, 乗数やペナルティパラメータ更新計算方法, 次元探索アルゴリズム, 収束判定法など, 数値計算上さらに検討すべき課題が多いと思われる.

最後に, 本論文をまとめるにあたり多くのご教示をいただいたキャノン(株)技術教育企画課田中一夫課長に感謝の意を表したい.

文 献

- 1) C. W. Carroll: "The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems," *Opt. Res.*, **9** (1961) 169-184.
- 2) W. I. Zangwill: "Non-linear programming via penalty functions," *Man. Sci.*, **13** (1967) 344-358.
- 3) M. J. Kidger and C. G. Wynne: "Experiments with lens optimization procedures," *Opt. Acta*, **14** (1967) 279-288.
- 4) H. H. Hopkins and A. Kadkly: "Control of damping factors and boundary conditions in optimization programs," *J. Mod. Opt.*, **35** (1988) 49-74.
- 5) K. Tanaka: "Linearization procedure of a nonlinear automatic lens design problem subject to boundary conditions," *Proc. SPIE*, **1319** Optics in Complex Systems (1990) 619-620.
- 6) K. Tanaka: "A formal linearization procedure of constrained nonlinear automatic lens design problems I. Formulation by means of penalty function method," *J. Opt. (Paris)*, **21** (1990) 241-245.
- 7) J. Meiron and H. M. Loebenstein: "Automatic correction of residual aberrations," *J. Opt. Soc. Am.*, **47** (1957) 1104-1109.
- 8) G. H. Spencer: "A flexible automatic lens correction procedure," *Appl. Opt.*, **2** (1963) 1257-1264.
- 9) J. L. Rayces and L. Lebach: "Experiments on constrained optimization with Spencer's method," *Opt. Eng.*, **27** (1988) 1031-1034.
- 10) S. Zhuang and Z. Qu: "Nonlinear model of the optimal tolerance design for a lens system," *Proc. SPIE*, **1354** International Lens Design Conference (1990) 177-179.
- 11) K. Tanaka: "A formal linearization procedure of constrained nonlinear automatic lens design problems II. Use of Slack variables and Lagrange multipliers," *J. Opt. (Paris)*, **22** (1991) 7-9.
- 12) M. R. Hestenes: "Multiplier and gradient methods," *J. Opt. Theory Appl.*, **4** (1969) 303-320.
- 13) P. C. Haarhoff and J. D. Buys: "A new method for the optimization of a nonlinear function subject to nonlinear constraints," *Comp. J.*, **13** (1970) 178-184.
- 14) S. P. Han: "Variable metric methods for minimizing a class of nondifferentiable function," *Math. Prog.*, **20** (1981) 1-13.
- 15) H. Yamashita: "Quadratic programming approximation for nonlinear optimization," 第4回数理計画シンポジウム論文集 (1983) pp. 35-58.
- 16) H. Matsui and K. Tanaka: "Solution of the damped least-squares problem by using a combination of eigenvalue and singular value decompositions," *Appl. Opt.*, **31** (1992) 2241-2243.
- 17) H. Matsui and K. Tanaka: "A novel determination method of an initial damping factor in the damped least-squares problem," in submission to *Appl. Opt.*
- 18) 坂和正敏: 非線形システムの最適化 (森北出版, 1991) pp. 102-107.
- 19) 松居吉哉: レンズ設計法 (共立出版, 1981) pp. 114-119.
- 20) D. G. Luenberger: *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed. (Addison-Wesley, 1984) pp. 397-401.