



光導波路の有限要素法解析

小柴正則

北海道大学工学部電子工学科 〒060 札幌市北区北13条西8丁目

(1993年5月27日受理)

Finite Element Analysis of Optical Waveguides

Masanori KOSHIBA

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,
Hokkaido University, N 13-W 8, Kita-ku, Sapporo 060

1. ま え が き

光ファイバ通信工学や集積光エレクトロニクスなどの分野の急速な発展に伴い、光導波路が中心的な役割を果たす機会が非常に多くなってきた。こうした光導波路の設計に必要な解析方法は、解析的な近似解法とコンピュータの使用を前提とした数値解法とに大別することができる^{1,2)}。

さて、汎用性の高い数値解法の一つとして知られる有限要素法は、任意形状の光導波路はもちろんのこと、任意の屈折率分布をもつ光導波路、さらには任意の異方性材料や非線形光学材料からなる光導波路への適用が極めて容易である。本稿では、光導波路解析の分野における有限要素法の利用状況について、二、三の解析事例を交えながら概観する。なお、紙面の都合もあり、有限要素法の数学的な取り扱いの詳細については、ここで紹介できなかった事例も含めて、解説書³⁻⁷⁾を参考にしていただきたい。

2. 光導波路の導波モード

光を局所的に閉じ込めて任意の方向に導波させる光導波路には、実にさまざまなものがある。図1(a)、(b)はそれぞれ、導波路断面内において屈折率 n が階段状に変化するステップ形光導波路、徐々に変化するグレーデッド形光導波路の一例を示したものである。これらの導波路は三次元光導波路、あるいはチャンネル光導波路と呼ばれ、光は横方向(x 方向)と厚み方向(y 方向)の両方向に閉じ込められている。これに対して、横方向には

光の閉じ込めを行わず、厚み方向にのみ光を閉じ込めた形の導波路は二次元光導波路、あるいはプレーナ光導波路と呼ばれる。

さて、チャンネル光導波路中の導波モードはハイブリッド(混成)モードになっているが、一般に、電界の主成分が x 方向であるか y 方向であるかによって、 E_{mn}^x モード(電磁界の主成分は E_x と H_y)と E_{mn}^y モード(電磁界の主成分は E_y と H_x)とに区別する。ここに m, n はそれぞれ x, y 方向のモード次数を表し、特に必要のない限り、以下ではこれらの添字を省略する。こうしたハイブリッドモードの伝搬特性は、マクスウェルの方程式から導出されるベクトル波動方程式を解くことによって、すなわちベクトル波解析を行うことによって求められる。

ところで、これらの E_x^x, E_y^y モードは、 $E_y \equiv 0$ となるTEモード(TE^y モード)と $H_x \equiv 0$ となるTMモード(TM^y モード)とが結合したハイブリッドモードと考えることができるが、一般に、 E_x^x モードでは TE^y モードが優勢であり、 E_y^y モードでは TM^y モードが優勢である。このため、 E_x^x, E_y^y モードをそれぞれ TE^y, TM^y モードで近似して、いわゆるスカラー波近似解析しても、実用上それほど問題のない解を得ることができる場合が少なくない。また、導波路の構造や対象とする導波モードの種類によっては、例えばプレーナ光導波路や光ファイバなどにおけるTE、TMモードのように、厳密な意味でスカラー波解析が可能な場合もある。なお、光ファイバには、TE、TMモードのほかに、HEモード(E_x に比べて H_x が優勢)、EHモード(H_x に比べて

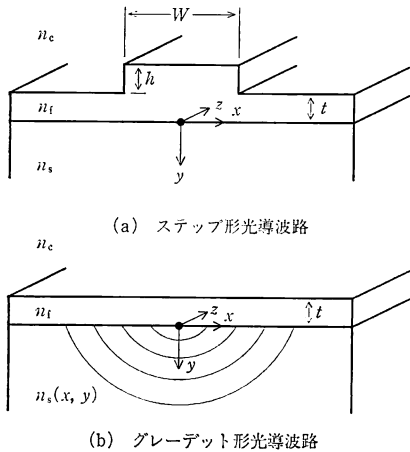


図 1 チャネル光導波路

E_z が優勢) と呼ばれるハイブリッドモードが存在する。これらのハイブリッドモードの伝搬特性を厳密に評価するには、もちろんベクトル波解析が要求されるが、通常の光ファイバでは、コアとクラッドの屈折率差が極めて小さく、いわゆる弱導波近似を用いてスカラー波解析しても、実用的にはほとんど問題がない。さらに付け加えておくと、HE, EH モードはいずれも二重に縮退しており、偏光状態を意識して議論する場合には、例えば、HE モードであれば、 HE^+ モードと HE^- モードとに区別する。

本稿では、伝搬方向には構造ならびに屈折率などの材料定数が変化しない光導波路に存在する導波モード、いわゆる固有モードの伝搬特性、具体的には、導波モードの実効屈折率 $n_{eff} = \beta/k_0$ (β は z 方向伝搬定数、 k_0 は自由空間波数) や界分布を求める問題、すなわち固有値問題を議論の対象としている。伝搬方向に折れ曲がりや分岐、さらには障害物などがある導波路中を導波光がどのように伝搬するかという導波光伝搬の問題、言い換えれば初期値問題については、紙面の都合もあり、拙文⁹⁾を参考にしていただきたい。

3. 有限要素法の概要

有限要素法の数学的基礎とされる変分法は、微分方程式の境界値問題を解くための有力な方法の一つであるが、通常、対象となる領域全体に対して試験関数を想定し、いわゆる汎関数の極値を探索するので、境界の形状が複雑であったり、物理量が急変したり、あるいは不均質媒質や異方性媒質などを含んでいたりすると、この試験関数の選択そのものが困難になる。そこで有限要素法では、まず、対象となる領域を要素と呼ばれる小部分に

分割して、その一つ一つに対して変分原理を適用し、それぞれの要素に対する離散化方程式、いわゆる要素方程式を導出する。このとき、試験関数は要素ごとに、すなわち区分的に設定される。

こうしてでき上がった要素方程式をすべての要素について重ね合わせ、系全体に対する離散化方程式、いわゆる全体方程式を組み立てる。このように領域を細かく分割すると、分割されたそれぞれの要素内においては、物理量の変化はそれほど大きくはないであろうから、比較的簡単な試験関数を用いたとしても、要素内における物理量の変化をかなり精度よく記述することができると思われる。実際、有限要素法では、この試験関数として 1 次多項式 (1 次要素)、2 次多項式 (2 次要素) といった極めて簡単な関数を用いている。

また、有限要素法では、物理量に対応する関数、例えば、電界、磁界を要素内に配置された節点におけるその関数値で展開するが、これは通常の変分法には見られない有限要素法の一つの大きな特徴であり、このため、要素ごとに得られた離散化方程式を節点のところで接続していくことによって、系全体に対する離散化方程式を組み立てることができることになる。

さて、有限要素法を用いて光導波路の導波モード解析の定式化を行うと、最終的には

$$[K]\{\phi\} = n_{eff}^2[M]\{\phi\} \quad (1)$$

のような行列固有値方程式を解く問題に帰着される。ここに $[K]$ 、 $[M]$ は導波路の構造や材料定数の値を反映した行列である。また、実効屈折率 n_{eff} の 2 乗が固有値になっており、それに対応する固有ベクトル $\{\phi\}$ が界分布を与える。これらの固有値、固有ベクトルを算出するための行列計算アルゴリズムにはさまざまなものがあり、行列 $[K]$ 、 $[M]$ が、実行列であるか複素行列であるか、複素行列であればエルミート行列であるか非エルミート行列であるか、対称行列であるか非対称行列であるか、密行列であるか疎行列であるか、帯行列であるか、などによって適宜使い分けが必要である。

なお、有限要素法では、問題ごとに多種多様な要素が用意されており、光導波路解析の分野においては、線要素 (プレーナ光導波路)、三角形要素 (チャネル光導波路、非軸対称光ファイバ)、軸対称環状要素 (軸対称光ファイバ) などがよく用いられている。

ところで、光導波路は開放形の導波路であるため、無限領域の処理が問題となり、こうした問題に対応するための方法が種々開発されているが、とりわけ仮想境界法という方法がよく用いられている。この方法は、導波部

から十分離れた位置に仮想境界を設定し、開放形の導波路を非開放形の導波路に置き換えるもので、開放形導波路を取り扱う最も簡単な方法である。ただし、仮想境界の影響は周波数、モードによって異なるので、仮想境界の位置決めには十分な注意が必要である。また、放射を伴う場合には、本質的にこの方法を適用することができず、無限領域を解析的に評価するといった工夫が必要となる。

4. 光導波路の有限要素法解析

これまで有限要素法による導波モード解析が実際に行われた光導波路の種類を、それぞれの解析に用いられた汎関数に含まれる電磁界成分とともに表1に示す。

表1からわかるように、チャンネル光導波路のベクトル

波解析用として各種の有限要素法が開発されているが、とりわけ、電磁界縦成分 (E_z と H_z) を用いた有限要素法と磁界の3成分を用いた有限要素法の二つの方法は、非軸対称光ファイバを含めて、ほとんどあらゆる構造の光導波路の解析や設計に数多く利用されてきた実績をもつ。特に、磁界の3成分を用いた有限要素法は、任意の異方性光導波路の解析が可能であり、従来から問題となっていたスプリアス解と呼ばれる非物理的な解を抑圧、除去するための方法も種々見出され、光導波路のベクトル波解析のための標準的な有限要素法として定着しつつある。

さて、前述したように、光導波路のハイブリッドモードの伝搬特性を厳密に評価するためにはベクトル波解析を行う必要があるが、導波路の構造によっては、スカ

表1 光導波路の有限要素法解析

線形／非線形	導波路の形状	要素の形状	解析の種別	汎関数に含まれる電磁界成分
線形	二次元光導波路	線要素	スカラ波解析	E_z (TE モード) H_z (TM モード)
	三次元光導波路	三角形要素	ベクトル波解析	E_x と H_x H (磁界全成分) E (電界全成分) H_t (磁界横成分) E_t (電界横成分) E_t と H_t E_t と H_x H_t と E_x E と H
			スカラ波近似解析	E_x (E^z モード) H_x (E^y モード)
	軸対称光ファイバ	軸対称環状要素	ベクトル波解析	E_z と H_z H
			スカラ波近似解析	R (横方向電磁界関数)
	非軸対称光ファイバ	三角形要素	ベクトル波解析	E_z と H_z H
			スカラ波近似解析	E_x (HE^z モード) E_y (HE^y モード)
	非線形	二次元光導波路	線要素	スカラ波解析
三次元光導波路		三角形要素	ベクトル波解析	H
			スカラ波近似解析	E_x (E^z モード) H_x (E^y モード)
軸対称光ファイバ		軸対称環状要素	スカラ波近似解析	R

ラー波近似解析で実用的に十分な場合も少なくない。このような観点から、スカラー波近似解析用の、いわゆるスカラー有限要素法も開発されている。このスカラー有限要素法では、解くべき行列の次元数がベクトル有限要素法の場合に比べて 1/2 から 1/3 に縮小され、また、スプリアス解が本質的に発生しないのが特徴である。

5. 解析事例

5.1 GaAs/AlGaAs リブ導波路

図 1(a) に示したステップ形光導波路の一例として、GaAs/AlGaAs リブ導波路を考え、動作波長を $\lambda=1.15 \mu\text{m}$ として、導波路パラメータを

$$W=3 \mu\text{m}, \quad t+h=1.0 \mu\text{m}$$

$$n_t=3.44, \quad n_s=3.40, \quad n_c=1.0$$

とする。

表 2 は、基本 E^+ モード (E_{H}^+ モード) の実効屈折率の膜厚 t 依存性を示したものである。表中には、磁界の 3 成分を用いたベクトル有限要素法による結果⁹⁾ とスカラー有限要素法による結果¹⁰⁾ を示してあるが、これらの結果は膜厚によらずよく一致しており、スカラー有限要素法の妥当性、有用性が確認される。

ところで、有限要素法を用いた数値解析には、高速演算性能を有する比較的大型のコンピュータが必要とされているが、最近のワークステーションの急速な高性能化と低価格化によって、こうした数値解析をワークステーション上でも実行することが可能となってきている。表 2 に示したスカラー有限要素法による結果は、筆者の研究室内のワークステーション上に構築された解析パッケージを使用して得られたものであり、解析作業の一例を図 2 に示す。導波路形状や境界条件、屈折率分布、動作波

表 2 GaAs/AlGaAs リブ導波路の E_{H}^+ モードの実効屈折率

t (μm)	ベクトル有限要素法	スカラー有限要素法
0	3.4121	3.41188
0.1	3.4122	3.41200
0.2	3.41235	3.41217
0.3	3.41255	3.41240
0.4	3.41285	3.41271
0.5	3.41315	3.41310
0.6	3.41365	3.41358
0.7	3.4141	3.41415
0.8	3.41475	3.41484
0.9	3.4156	3.41568

長。解析対象モードといった計算に必要なパラメータはすべて対話形式で入力することができ、要素分割は自動化されている。また、界分布の等高線表示機能、3次元表示機能が備わっており、複数の結果を同時に表示させることもできる。なお、解析にはスカラー有限要素法を用いているが、無損失を仮定しているため、式(1)の行列 $[K]$, $[M]$ はそれぞれ実対称行列、正値実対称行列になる。ここでは、式(1)の一般固有値問題を、まず、コレスキー (Cholesky) 法によって $[M]=[L][L]^T$ ($[L]$ は下三角行列、 $[L]^T$ は $[L]$ の転置行列) と分解し、 $[L]^T \{\phi\} = \{\tilde{\phi}\}$ として、標準固有値問題

$$[L]^{-1}[K][L]^T \{\tilde{\phi}\} = n_{\text{eff}}^2 \{\tilde{\phi}\} \quad (2)$$

に変換する。次に、この標準固有値問題に対して、ハウスホルダー (Householder) 変換、バイセクション (bisection) 法、逆反復法を適用し、 n_{eff} , $\{\tilde{\phi}\}$ を求め、 $\{\phi\} = ([L]^T)^{-1} \{\tilde{\phi}\}$ としている。

5.2 Ti 拡散 LiNbO₃ 導波路

図 1(b) に示したグレーデッド形光導波路の一例として、薄膜を装荷した Ti 拡張 LiNbO₃ 導波路を考え、常光線、異常光線に対する屈折率はそれぞれ

$$n_o(x, y) = n_{so} + \Delta n_o \{f(x)g(y)\}^{\alpha_o} \quad (3)$$

$$n_e(x, y) = n_{se} + \Delta n_e \{f(x)g(y)\}^{\alpha_e} \quad (4)$$

で与えられるものとする。ここに n_{so} , n_{se} は基板の屈折率、 Δn_o , Δn_e は拡散による屈折率の最大変化量、 α_o , α_e は実験的に定められる定数である。また、拡散前の Ti パターン幅を W_0 , x , y 方向の拡散長をそれぞれ d_x , d_y とし、 x , y 方向の屈折率分布関数はそれぞれ誤差関数、ガウス関数で与えられるものとして

$$f(x) = \frac{\text{erf}\{(x+W_0/2)/d_x\} - \text{erf}\{(x-W_0/2)/d_x\}}{2 \text{erf}(W_0/2d_x)} \quad (5)$$

$$g(y) = \exp\{-(y/d_y)^2\} \quad (6)$$

のように表す。さらに、動作波長を $\lambda=1.52 \mu\text{m}$ として、導波路パラメータを

$$W_0=14 \mu\text{m}, \quad d_x=4.007 \mu\text{m}, \quad d_y=3.381 \mu\text{m}$$

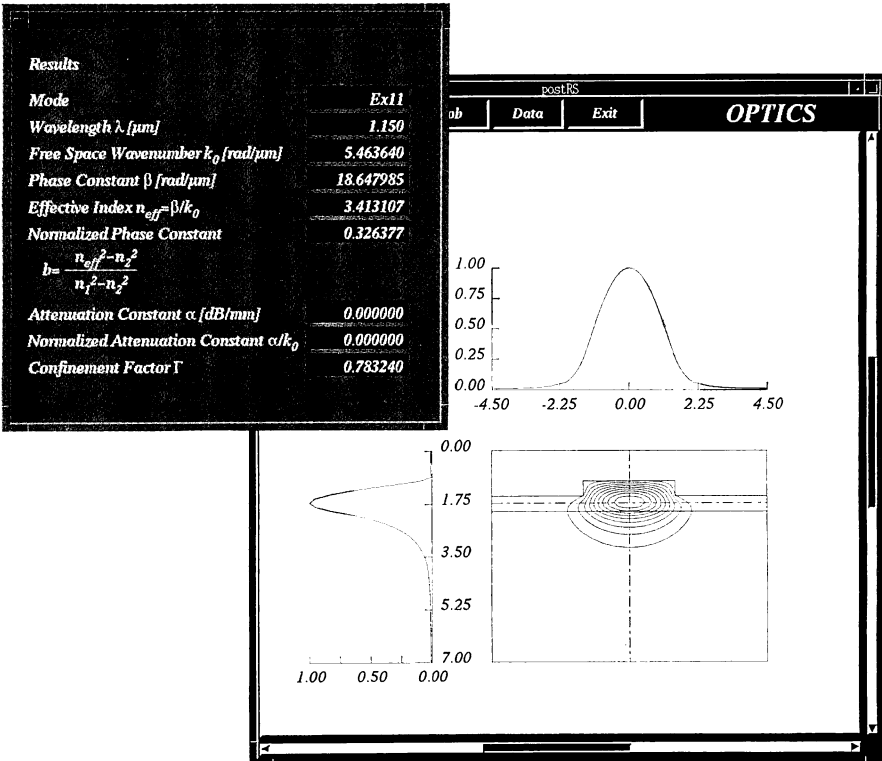
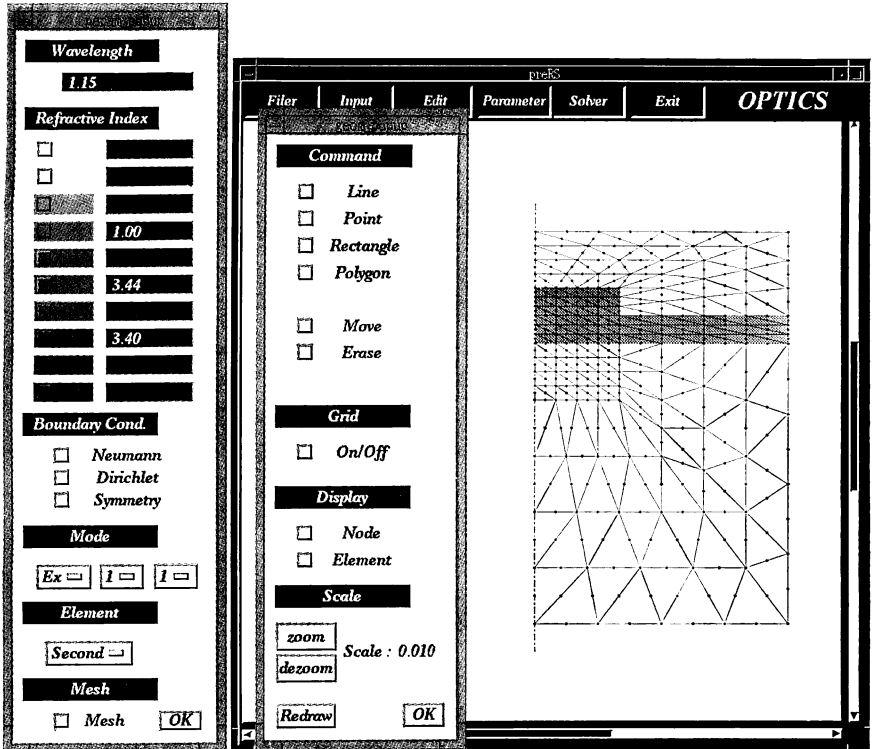
$$n_{so}=2.214, \quad n_{se}=2.138, \quad n_c=1.0$$

$$\Delta n_o=0.0074, \quad \Delta n_e=0.0196$$

$$\alpha_o=0.55, \quad \alpha_e=1.0$$

とし、 X カット Y 伝搬の場合の E_{H}^+ モードと E_{H}^- モードのスカラー有限要素法による解析結果を図 3 に示す。図中の n_{eff} は実効屈折率であり、界分布の等高線は最大値の 10% 間隔で表示してある。

薄膜の屈折率を $n_t=2.138$ としたとき、 E_{H}^+ , E_{H}^- モードのいずれの場合も基板表面には低屈折率の薄膜が装荷されたことになり、特に E_{H}^+ モードの場合には、膜厚の



Results

Mode	Ex11
Wavelength λ [μm]	1.150
Free Space Wavenumber k_0 [$\text{rad}/\mu\text{m}$]	5.463640
Phase Constant β [$\text{rad}/\mu\text{m}$]	18.647985
Effective Index $n_{\text{eff}} = \beta/k_0$	3.413107
Normalized Phase Constant	0.326377
$b = \frac{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$	
Attenuation Constant α [dB/mm]	0.000000
Normalized Attenuation Constant α/k_0	0.000000
Confinement Factor Γ	0.783240

图 2 解析作业例

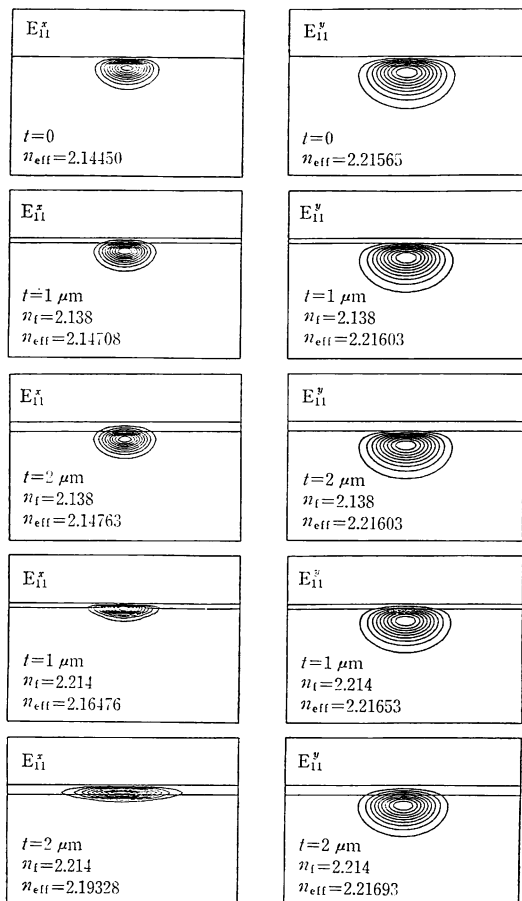


図 3 Ti 拡散 LiNbO_3 導波路の E_{11}^x モードと E_{11}^y モードの実効屈折率と界分布

増加とともに界分布の深さ方向の非対称性が改善されている。なお、 E_{11}^x モードの場合には、基板表面の屈折率と薄膜の屈折率との差が E_{11}^y モードの場合よりもかなり大きくなるために、薄膜内への界のしみ出しが少なく、結果として界分布の非対称性はほとんど改善されていない。

一方、薄膜の屈折率を $n_f=2.214$ としたとき、 E_{11}^x モードの場合には、基板表面に高屈折率の薄膜が装荷されたことになり、膜厚の増加とともに光の閉じ込め領域は基

板表面付近から次第に薄膜内へと移動している。これに対して、 E_{11}^y モードの場合には、基板表面に依然として低屈折率の薄膜が装荷されていることになり、また、基板表面の屈折率と薄膜の屈折率との差が $n_f=2.138$ の場合に比べてかなり小さくなるために、薄膜内に界がしみ出しやすく、界の非対称性が改善されている。

6. む す び

光技術の進展に伴い、ますますその重要性が高まっている光導波路の解析法のなかから、特に有限要素法を取り上げ、その利用状況を概観した。ここでは光導波路の導波モードを求める問題に限って述べたが、このほかにも、導波光の伝搬方向への変化や空間的な発展の様子を調べる問題、半導体レーザーと光導波路、あるいは光導波路どうしの結合効率を調べる問題、超高速光パルスの伝搬に伴う時間的変動を調べる問題、非線形光学材料を含む問題など、重要な問題が多々あり、有限要素法も含めて、これらの問題への挑戦が続いていることを付記しておく。

文 献

- 1) 小柴正則：“電磁界解析”，テレビジョン学会誌，**38**(1984) 1045-1052.
- 2) 小柴正則：“光導波路の解析法”，応用物理，**61** (1992) 22-29.
- 3) 大越孝敬，岡本勝就，保立和夫：光ファイバ（オーム社，東京，1983）.
- 4) 小柴正則：光・波動のための有限要素法の基礎（森北出版，東京，1990）.
- 5) 小柴正則：光導波路解析（朝倉書店，東京，1990）.
- 6) 岡本勝就：光導波路の基礎（コロナ社，東京，1992）.
- 7) M. Koshiba: *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method* (KTK/Kluwer, Tokyo/Dordrecht, 1992).
- 8) 小柴正則：“導波光伝搬の解析法”，レーザー研究，**19** (1991) 295-304.
- 9) B. M. A. Rahman and J. B. Davies: “Vector-H finite element solution of GaAs/GaAlAs rib waveguides,” IEE Proc. Optoelectron., **132** (1985) 394-353.
- 10) M. Koshiba, H. Saitoh, M. Eguchi and K. Hirayama: “Simple scalar finite element approach to optical waveguides,” IEE Proc. Optoelectron., **139** (1992) 166-171.