解説

ソリトン伝搬の数値計算による解析
—BPM を中心として—

尾﨑　政男・藤井　陽一
東京大学生産技術研究所　〒106 東京都港区六本木 7-22-1

(1993年6月10日受理)

Numerical Analysis on Soliton Propagation
—BPM and FTDT—

Masao OZAKI and Yoichi FUJII
Institute of Industrial Science, University of Tokyo,
7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106

1. はじめに

光ファイバー通信における通信速度の高速化のために，光包絡線ソリトンを用いることは，実験的研究も進んでおり，超高速伝送システムとして期待されていることは周知のことである[1]. 光通信の高速化のためには，より短いパルスを用いることが必要であるが，通常の光通信システムの場合は，パルス幅が 10 ps 程度以下になると，ファイバーの群速度分散によるパルス波形の歪みが大きくなり，伝送距離が大きく制限される．一方，光ソリトンの場合には，群速度分散によるパルスの歪みを非線形効果により打ち消すのでその心配がない．実際には，伝搬中にファイバー損失による振幅の減衰が起こるが，近年開発の進んだ Er ドープファイバーを用いることにより増幅を行うことが確認され，光ソリトン伝送システムは，より有望視されるようになった[2,3].

光ファイバー中の電場の包絡線を記述する方程式を非線形シュレーディンガー方程式で近似した場合の解が，この光包絡線ソリトンである．非線形シュレーディンガー方程式は，Korteweg-de Vries 方程式と同様に，逆散乱法により，解析的に解くことができることはよく知られている[4]. しかし，実際には，3次以上の高次の分散効果，ラマン効果，より高次の非線形効果，損失などの寄与を考慮する必要があることが多い．その場合には，もはや，解析的に問題を考えることは，困難であり，数値計算に頼ることになる．

数値計算の手法として，ビーム伝搬法 (beam-propagation method : BPM) は強力なものとして知られている．この論文では，光ファイバー中のソリトン様の包絡線の伝搬の BPM による数値解析を中心に述べる．

2. ビーム伝搬法 (BPM) とは

BPM の原型は，Fleck, Morris, Feit によりレーザービームの大気中の伝搬を扱った論文に見出せる[5,6]. その後，Helmholtz 方程式を数値的に解くのに有力な方法であるため，非一様な屈折率を有する媒質中を伝搬する光ビームを解析する手段として盛んに用いられるようになった．

ファイバー中の単一周波数の光の伝搬を，電場の横成分 E が次の Helmholtz 方程式で記述される状況で考える[7].

$$\triangle E+\left(\frac{\omega^2 n^2}{c^2}\right)E=0 \tag{1}$$

ここで，ω は光の角周波数，n は屈折率，c は光速である．$z=\Delta z$ での (1) の解は，$z=0$ の電場を用いて形式的に次のように書ける．

$$E(x,y,\Delta z)=\exp\left[\pm i\Delta z\left(\triangle_\perp+\frac{\omega^2 n^2}{c^2}\right)^{1/2}\right]\times E(x,y,0) \tag{2}$$

ここで $\triangle_\perp=\partial_x{}^2+\partial_y{}^2$ である．

$$\left(\triangle_\perp+\frac{\omega^2n^2}{c^2}\right)^{1/2}=\frac{\triangle_\perp}{(\triangle_\perp+\omega^2n^2/c^2)^{1/2}+\omega n/c}+\frac{\omega n}{c} \tag{3}$$

という書換えをして，屈折率は，$n(\omega,\boldsymbol{x})\fallingdotseq n_0$ のように変動が小さく，(3)の右辺の分母の n を n_0 で置き換えられるときには，$k=n_0\omega/c$ とおいて，

$$\left(\triangle_\perp+\frac{\omega^2n^2}{c^2}\right)^{1/2}=\frac{\triangle_\perp}{(\triangle_\perp+k^2)^{1/2}+k}+k+k\left(\frac{n}{n_0}-1\right) \tag{4}$$

と近似できる．

$$E(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x})\exp(-\mathrm{i}\,kz) \tag{5}$$

の形の解を見つけよう．(5)を(2)に代入すれば，

$$A(x,y,\varDelta z)=\exp\left[-\mathrm{i}\,\varDelta z\left\{\frac{\triangle_\perp}{(\triangle_\perp+k^2)^{1/2}+k}+\alpha(x,y)\right\}\right]\times A(x,y,0) \tag{6}$$

ここで，$\alpha(x,y)=k(n/n_0-1)$ とおいた．

(6)は，$\varDelta z$ の2次のオーダーの近似で，対称形のスプリットオペレーター形式[8]で書けて次のようになる．

$$A(x,y,\varDelta z)=\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\varDelta z}{2}\right)\left\{\frac{\triangle_\perp}{(\triangle_\perp+k^2)^{1/2}+k}\right\}\right]\cdot\exp(-\mathrm{i}\,\varDelta z\alpha)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\varDelta z}{2}\right)\cdot\left\{\frac{\triangle_\perp}{(\triangle_\perp+k^2)^{1/2}+k}\right\}\right]A(x,y,0)+(\varDelta z)^3 \tag{7}$$

誤差は，$\triangle_\perp$ と α とが非可換であることに由来する[5]．この(7)の形の表式は，数値解を得るのに適した形である．ここで $\exp[-\mathrm{i}(\varDelta z/2)[\triangle_\perp/\{(\triangle_\perp+k^2)^{1/2}+k\}]]A(x,y,0)$ は，屈折率 $n=n_0$ の一様な場合の Helmholtz 方程式

$$\triangle E+\frac{\omega^2n_0^2}{c^2}E=0 \tag{8}$$

を解くことと等価であることを注意しておこう．(7)の数値解を有限2次元フーリエ級数で表すと，

$$A(x,y,\varDelta z)=\sum_{m=-N/2+1}^{N/2}\sum_{n=-N/2+1}^{N/2}A_{mn}(\varDelta z)\cdot\exp\left\{\frac{2\pi\,\mathrm{i}(mx+ny)}{L}\right\} \tag{9}$$

L は計算が行われる (x,y 方向に) 長さである．(9)を(8)へ代入すれば，

$$A_{mn}(\varDelta z)=A_{mn}(0)\exp\left[\mathrm{i}\,\varDelta z\left\{\frac{\kappa_x{}^2+\kappa_y{}^2}{(-\kappa_x{}^2-\kappa_y{}^2+k^2)^{1/2}+k}\right\}\right] \tag{10}$$

となる．ここで，$\kappa_x=2\pi m/L$, $\kappa_y=2\pi n/L$ とおいた．Fourier 係数 $A_{mn}(0)$ は離散的 Fourie 変換 (DFT) を用いて評価すれば，

$$A^D_{mn}(0)=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}A(j\varDelta x,l\varDelta y,0)\cdot\exp\left\{\frac{-2\pi\,\mathrm{i}(mj+nl)}{N}\right\} \tag{11}$$

で与えられるものである．ここで，$\varDelta x,\varDelta y$ はサンプル点の間隔である．これは，高速 Fourie 変換 (FFT) により数値計算処理ができるところが大きな利点となっている．

非線形屈折率を有する媒質中での電場を $E=\mathrm{Re}\,A\cdot\exp(\mathrm{i}\,\omega t-\mathrm{i}\,kz)$ と表すとき，次の式で記述される[9]．

$$2\mathrm{i}k\frac{\partial A}{\partial z}=\triangle_\perp A+\left(\frac{k^2n_2|A|^2}{n_0}+\mathrm{i}\,k\alpha\right)A \tag{12}$$

非線形屈折率 $\varDelta n_{\mathrm{NL}}$ は，

$$\varDelta n_{\mathrm{NL}}=n_2\langle A^2\rangle=\frac{n_2|A|^2}{2} \tag{13}$$

で与えられる．この場合も前と同様に形式解は，

$$A(x,y,\varDelta z)=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varDelta z\triangle_\perp}{2k}-\mathrm{i}\,\varDelta z\varPhi\right)A(x,y,0) \tag{14}$$

となる．ただし，$\varPhi=(k^2n_2|A|^2/n_0+\mathrm{i}k\alpha)/2k$ である．以下，Helmholtz 方程式を解くときと同様に FFT を援用して，数値計算を行うことになる．

BPM による数値計算方法をまとめると，

(1) 一様な屈折率媒質を $\varDelta z/2$ だけ伝搬する問題を解く．

(2) 屈折率の非一様性を取り入れるが分散のない媒質中を $\varDelta z$ 伝搬する問題を解く．

(3) 一様な屈折率媒質を $\varDelta z/2$ だけ伝搬する問題を解く．

各ステップの初期条件は前のステップの終条件を取る．また数値計算は，FFT を用いる．

BPM についての詳細な評価は，文献 10), 11) を参照されたい．

3. ソリトン伝搬における BPM

光ファイバー中の電場を

$$E(r,z,t)=\mathrm{Re}\,\{\phi(z,t)R(r)\exp(\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t)\} \tag{15}$$

で表し，波数 $k(\omega,|E|^2)$ をキャリアー周波数 $\omega_0=2\pi c/\lambda$ と $|E|^2=0$ の回りでテイラー展開した後，ファイバーの断面について平均を取った後，下記の無次元の変数を導入すると，電場の包絡線 $\phi(z,t)$ は次の方程式を満たす．

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+|q|^2 q$$
$$=-i\Gamma q+i\beta\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3}-C_4|q|^4 q \qquad (16)$$

ここで，$\xi=10^{-9}z/\lambda$，$\tau=10^{-4.5}\{t-z(\partial\omega/\partial k)\}/(-\lambda\partial^2 k/\partial\omega^2)^{1/2}$，$q=10^{4.5}(\pi n_2 A)^{1/2}\phi$，$C_4=2\times10^{-9}(n_4/n_2{}^2+1/2n_0)\cdot B/\pi A^2$，$\beta=10^{-4.5}\partial^3 k/\partial\omega^3/6\lambda^{1/2}(-\partial^2 k/\partial\omega^2)^{3/2}$，$\Gamma=10^9\lambda\gamma$（$\gamma$：減衰定数），$A=(\int R^*|R|^2 Rr\,\mathrm{d}r)/D$，$B=(\int R^*|R|^4\cdot Rr\,\mathrm{d}r)/D$，$D=\int R^* Rr\,\mathrm{d}r$ である[12]．波長 $\lambda=1.5\,\mu$m のとき，$D=\lambda^2/2\pi c(\partial^2 k/\partial\omega^2)$ で定義される群速度分散 D は通常のファイバーでは -10 ps/nm/km 程度の値であり，$\xi=1$ は $z=1.5$ km，$\tau=1$ は $t=2$ ps，$q=1$ は $E=2\times10^6$ V/m に相当する．また，(16)式の第2項は，群速度分散，第3項はカー効果を表している．

ξ での q を用いて $\xi+\Delta\xi$ での q を表すと前節での議論と同様にして，

$$q(\tau,\xi+\Delta\xi)=GH(Gq(\tau,\xi))Gq(\tau,\xi)+(\Delta\xi)^3 \qquad (17)$$

ここで，

$$G=\exp\left[\frac{\Delta\xi}{2}\left\{\frac{1}{2}i\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\beta\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\right\}\right],$$
$$H(q)=\exp\{is\Delta\xi(|q|^2+C_4 s|q|^4)-\Gamma\Delta\xi\},$$
$$s=1-\Gamma\Delta\xi$$

である．

Yevick と Hermansson は上記を BPM を用いて数値計算を行った[13]．差分法によって直接解く方法においては，誤差は $\Delta\xi$ の2次のオーダーであるが，BPM の場合，3次のオーダーであるという利点がある．また，Fisher and Bischel, Hasegawa and Tappert 達の数値計算においては，split-step 法を用いているが，非線形効果を取り入れるステップで常微分方程式を解くため Runge-Kutta 法を用いていた．この BPM による数値計算では常微分方程式を解く必要がないため，計算時間の大きな節約が得られた．

損失のある場合 ($\Gamma=0.1$) には，$N=3$ ソリトン（ここで N は，入力波形の振幅でありすなわち，$q(\tau)=N\,\mathrm{sech}\,\tau$ と与えることに相当する．この入力パルスでは，(16)式の右辺が0の場合，N 個のソリトンで記述され，パルスは周期的に波形を変えながら伝搬することが知られている[31]）は，実効的なソリトン周期がかなり増加し，次の周期には原型に戻らないことを示した．3次分散のある場合 ($\beta=-0.01$) には，$N=3$ ソリトンはすぐに ($\xi=\pi/2$) 程度で崩れてしまうことを示した．なお，$N=1$ ソリトンは，$N=3$ と異なり影響を余り受けない．

Blow と Wood[14] はこの方法の改良版を提案した．それは，距離 Δz の前方へのステップを4回取り，次に，後方への距離 $2\Delta z$ のステップを取り，その後，また前方への距離 Δz のステップを4回取るというものである（全体としては，$6\Delta z$ だけ進んでいることになる）．すると誤差は，$4(\Delta z)^3+(-2\Delta z)^3+4(\Delta z)^3$ となり，3次のオーダーの誤差は相殺されて，誤差のリーディング項は5次となる．彼らは，ラマン散乱の影響を見るために，波長 1.32 μm，CW パワー 50 W のポンプ波を用いて，ポンプ波の近傍の雑音の成長率を上記の方法を用いて数値計算を行った．240 m の伝搬の後では，スペクトル強度で見ると，元のポンプ波は減少して，低周波数側にピークがシフトし，1次ストークスおよび2次ストークスシフトを中心に小さな山がみられる．時間領域で見ると，二つのソリトンパルス（振幅の大きい方のパルス幅は約 150 fs）があることを示した．

4. FD-BPM について

FD-BPM (finite difference beam propagation method[15-17] は，従来の BPM が FFT を利用するのに対して，差分近似を用いることから名付けられている．Helmholtz 方程式の近軸近似の次の方程式を考える．

$$2ik_0 n_0\frac{\partial E}{\partial z}=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+k_0{}^2\{n^2(x,z)-n_0{}^2\}E \qquad (18)$$

E は屈折率プロファイルが $n(x,z)$ であるスラブ型導波路の TE モードの電場成分であり，y 方向である．通常の BPM では，前の場合と同様に，$z+\Delta z$ での電場は z での電場を用いて，次のように表す．

$$E(z+\Delta z)=PQPE(z)$$
$$P=\exp\left(-i\frac{\Delta z}{4k_0 n_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$
$$Q=\exp\left\{-ik_0 n_0\Delta z\frac{n^2(x,z+\Delta z/2)/n_0{}^2-1}{2}\right\} \qquad (19)$$

そして，以下 FFT を用いて数値計算を行う方法は前節で述べたとおりである．

FD-BPM においては，(18)の偏微分方程式を次の差分近似で置き換える．

$$2ik_0 n_0\frac{\partial E_i}{\partial z}=\frac{E_{i-1}-2E_i+E_{i+1}}{\Delta x^2}$$
$$+k_0{}^2\{n_i{}^2(z)-n_0{}^2\}E_i \qquad (20)$$

ここで，E_i は，$(i\Delta x,z)$ での電場である（ただし，$i=0,1,2,\cdots,N-1$）．(20)を z と Δz との間で積分し，右辺の積分を台形公式を用いて近似すると，$z+\Delta z$ の電場と z の電場の間の関係を次の式で表せる．

$$-aE_{i-1}(z+\Delta z)+bE_i(z+\Delta z)-aE_{i+1}(z+\Delta z)$$
$$=aE_{i-1}(z)+cE_i(z)-aE_{i+1}(z) \tag{21}$$

ここで,

$$a=\frac{\Delta z}{2\Delta x^2}$$
$$b=\frac{\Delta z}{\Delta x^2}-k_0{}^2\Delta z\frac{n_i{}^2(z+\Delta z)-n_0{}^2}{2}+2\mathrm{i}k_0n_0$$
$$c=-\frac{\Delta z}{\Delta x^2}-k_0{}^2\Delta z\frac{n_i{}^2(z)-n_0{}^2}{2}+2\mathrm{i}k_0n_0 \tag{22}$$

この結果は，線形方程式の３重対角行列の形なので数値計算に向いている．Chung と Dagli によれば，格子点が 128〜524 の範囲のとき，伝搬の１ステップあたりの計算時間が FD-BPM は FFT-BPM の 1/4 から 1/6 程度に短くなっている．これは，N 個の１次方程式系を解くのに要する計算時間は N のオーダーで増加するのに対して，FFT では，$N\log N$ のオーダーで増加するためである．さらに，FD-BPM の方が伝搬のステップサイズおよび格子点の数に関して，はるかに安定であるという結果が得られた．また，ステップ型のインデックスを持つ導波路に対しては，特に，同程度の精度に必要な伝搬のステップサイズは，FD-BPM に比して，FFT-BPM では非常に小さく取らねばならないことを示した．

5. FTDT 法について

近年，フェムト秒領域の光パルスも，分子レベルでの緩和現象，超短時間における過渡的物理現象の測定などにとって，重要であることから注目されている．このような速い現象を，非線形シュレーディンガー方程式（拡張されたものも含めて）に基づいて考察することは，高次分散が非常に重要になることから，良い方策とは言えない．ここでは，Maxwell 方程式を直接扱おうとする FTDT (finite-difference time-domain) 法について紹介したい．

大きな不連続構造あるいは周期的構造（例えば DFB 構造）を持つ導波路のように反射や分極効果が重要になる導波路の解析において，基本的に前進波のみを取り扱う BPM による解析の改良[18]あるいは，別の方法が求められる．そこで，提案されたのが FTDT である[19-21]．２次元の TE モードの伝搬を z 方向には一様と仮定すると，次の Maxwell 方程式を解けば良いことになる．

$$\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}=-\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{23}$$
$$\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{24}$$
$$\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}-\sigma E_z \tag{25}$$

Yee[22] は，空間を分割して，格子上の点で代表させた．Δx, Δy をそれぞれ，格子の x, y 方向の一辺の長さとすると，空間点は，$(x, y)=(i\Delta x, j\Delta y)=(i, j)$ のように表せて，場は次のように表される．

$$f(x, y, t)=f(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)=f^n(i, j) \tag{26}$$

この記法を用いて，(23)〜(25)を有限差分形式に書き直すと，次のようになる．

$$H_x^{n+1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n-1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)-c\frac{\Delta t}{\Delta y}\{E_z^n(i, j+1)-E_z^n(i, j)\} \tag{27}$$

$$H_y^{n+1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)=H_y^{n-1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)+c\frac{\Delta t}{\Delta x}\{E_z^n(i+1, j)-E_z^n(i, j)\} \tag{28}$$

$$E_z^{n+1}(i, j)=\frac{M_1(l)}{M_2(l)}E_z^n(i, j)+\frac{c\Delta t}{\varepsilon_r(l)M_2(l)}\times\frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j)-H_y^{n+1/2}(i-1/2, j)}{\Delta x}-\frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2)-H_x^{n+1/2}(i, j-1/2)}{\Delta x} \tag{29}$$

ただし,

$$M_1(l)=1-\sigma(l)c\Delta tZ_0/2\varepsilon_r(l),$$
$$M_2(l)=1+\sigma(l)c\Delta tZ_0/2\varepsilon_r(l),$$

E と H はそれぞれ，$\sqrt{\mu_0}$, $\sqrt{\varepsilon_0}$ で割って規格化しており，ε_r は比誘電率，$Z_0=(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ は自由空間のインピーダンスである．$t\leqq n$ に対する場の分布はわかっているとすると，$t=n+1/2$ での H の成分は，$t=n$ での時間微分によって $t=n-1/2$ での値を更新することで評価される．H の時間微分は E の空間微分に関係しているので，$t=n$ での H の時間微分は $t=n$ での E の既知の値から決められ，(27)，(28)のようになる．(29) では，同じアルゴリズムを用いて，$t=n+1/2$ で与えられた H から $t=n+1$ での E を求めることになる．Chu と Chaudhuri[19] は厳密解が知られている対称な平行スラブ導波路について，FDTD との比較を行っており，よく一致することを確かめている．

この方法は，厳密でかつ強力であるが，計算機への負担が大きい．実際には，スカラー解析で十分な場合が多く，その改訂版は Huang などにより与えられている[23]．横モード電場 E の振幅に対するスカラー波方程式

$$\nabla^2 E-\left(\frac{n^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$$

の解は上述と同様の方法により，

$$\begin{aligned}
&E^{n+1}(i,j,k)\\
&=2\left\{1-\frac{\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2}{n^2(i,j,k)}\right\}E^n(i,j,k)-E^{n-1}(i,j,k)\\
&\quad+\frac{\delta_x^2}{n^2(i,j,k)}\{E^n(i+1,j,k)+E^n(i-1,j,k)\}\\
&\quad+\frac{\delta_y^2}{n^2(i,j,k)}\{E^n(i,j+1,k)+E^n(i,j-1,k)\}\\
&\quad+\frac{\delta_z^2}{n^2(i,j,k)}\{E^n(i,j,k+1)+E^n(i,j,k+1)\}
\end{aligned}\tag{30}$$

ここで，

$$\delta_x=c\frac{\Delta t}{\Delta x},\quad \delta_y=c\frac{\Delta t}{\Delta y},\quad \delta_z=c\frac{\Delta t}{\Delta z}$$

である．

FTDT の応用として，ソリトンの解析に重要なのは，フェムト秒領域の現象を扱う場合で，一般化された非線形シュレーディンガー方程式(GNLSE)に基づくよりも，Maxwell 方程式を直接扱う方がよい場合である[24,25]．Goorjian と Taflove は，場の成分が，E_z と H_y だけで，x 方向へ伝搬する場合を考えた．分極は，次の線形な部分 $P_{z\mathrm{L}}$ と非線形な部分 $P_{z\mathrm{NL}}$ から成ると仮定した．

$$P_{z\mathrm{L}}(x,t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')E_z(x,t')\,\mathrm{d}t' \tag{31}$$

$$\begin{aligned}P_{z\mathrm{NL}}(x,t)=\varepsilon_0\chi^{(3)}E_z(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}&\{\alpha\delta(t-t')\\
&+(1-\alpha)g_{\mathrm{R}}(t-t')\}E_z^2(x,t')\mathrm{d}t'\end{aligned}\tag{32}$$

非線形分極の第1項は，Kerr 効果，第2項は Raman 効果を表している．次式のように関数 $F(t)$, $G(t)$ を定義すると，

$$F(t)=\varepsilon_0\int_0^t\chi^{(1)}(t-t')E_z(x,t')\,\mathrm{d}t' \tag{33}$$

$$G(t)=\varepsilon_0\int_0^t g_{\mathrm{R}}(t-t')E_z^2(x,t')\mathrm{d}t' \tag{34}$$

F と G は，次の t に関して2次の2組の非線形な常微分方程式で表される．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\delta}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+\left(1+\frac{\varepsilon_s-\varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty+\alpha\chi^{(3)}E^2}\right)F\\
&\quad+\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon_\infty)(1-\alpha)\chi^{(3)}EG}{\varepsilon_\infty+\alpha\chi^{(3)}E^2}=\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon_\infty)D}{\varepsilon_\infty+\alpha\chi^{(3)}E^2}\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\bar{\omega}_0^2}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\bar{\delta}}{\bar{\omega}_0^2}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}+\left(1+\frac{(1-\alpha)\chi^{(3)}E^2}{\varepsilon_\infty+\alpha\chi^{(3)}E^2}\right)G\\
&\quad+\frac{EF}{\varepsilon_\infty+\alpha\chi^{(3)}E^2}=\frac{DE}{\varepsilon_\infty+\alpha\chi^{(3)}E^2}\end{aligned}\tag{36}$$

(35)，(36)を差分法で同時に解く．そして，ニュートン法を用いて，

$$E=\frac{D-F-(1-\alpha)\chi^{(3)}EG}{\varepsilon_0(\varepsilon_\infty+\alpha\chi^{(3)}E^2)}$$

から E を求め，

$$\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

を FD-TD スキームに載せたものと併せて解いている．その結果，子供のソリトンのキャリア周波数が上方へシフトするという現象を見いだしている．GNLSE では，子供のソリトンの存在は予言しているが，キャリア周波数のシフトに関しては，予測することは難しい．

6. まとめ

光ファイバーあるいは光導波路中の光ソリトンの伝搬を数値的に解析する場合 BPM 法（改良版としての FD-BPM も含めて）は，強力な方法である．光ソリトンの通信への応用を考えると，サブピコ秒のパルスは高次分散の影響が大きく波形が維持されないため適さず，ピコ秒以上のパルスが通常は考察の対象になる．したがって，光通信がらみの問題での BPM 法の使用は，極めて妥当である．

しかし，フェムト秒領域の現象を扱う場合には，Maxwell 方程式を直接扱う FTDT を利用する等の考慮が必要になってくる．FTDT は計算機への負担が大きいが，基礎物理現象の解明ともつながる興味深い領域を扱うことができ，まだそれほど多くは使われていないため，非常に今後期待される手法である．

また，ゲージ理論などで威力を発揮してきた経路積分表示を用いた方法もソリトン伝搬の解析に用いられるようになった．この方法では，1単位区間あたりの FFT の演算が，BPM の2回に対して，1回で済むという特色がある．しかし精度をよくするには，単位区間を十分小さく取る必要がある．詳しい内容は文献を参照されたい[26-30]．

いずれにせよ，それぞれの場合に応じた適切な数値計算の方法を採用することが，肝要である．

文　献

1) 長谷川晃：ファイバー中の光ソリトン，物理学最前線 20（共立，1990).

2) L. F. Mollenauer, E. Lichtman, G. T. Harvey, M. J. Neubelt and N. M. Nyman: "Demonstration of error-free soliton transmission over than 15000 km at 5

Gbit/s single-channel, and over more than 11000 km at 10 Gbit/s in two-channel WDM," Electron. Lett., **28** (1992) 792-794.

3) M. Nakazawa, K. Suzuki and E. Yamada: "20 Gbit/s, 1020 km penalty-free soliton data transmission using erbium-doped fibre amplifiers," Electron. Lett., **28** (1992) 1046-1047.

4) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media," Sov. Phys. -JETP, **34** (1972) 62-69.

5) J. A. Fleck, Jr., J. R. Morris and M. D. Feit: "Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere," Appl. Phys., **10** (1976) 129-160.

6) J. A. Fleck, Jr., J. R. Morris and M. D. Feit: "Time-dependent propagation of high-energy laser beams through the atmosphere: II," Appl. Phys., **14** (1977) 99-115.

7) M. D. Feit and J. A. Fleck, Jr.: "Light propagation in graded-index optical fibers," Appl. Opt., **17** (1978) 3990-3998.

8) R. A. Fisher and W. K. Bischel: "Numerical studies of the interplay between self-phase modulation and dispersion for intense plane-wave laser pulses," J. Appl. Phys., **46** (1975) 4921-4934.

9) J. A. Fleck, Jr., J. R. Morris and E. S. Bliss: "Small-scale self-focusing effects in a high power glass laser amplifier," IEEE J. Quantum Electron., **QE-14** (1978) 353-363.

10) J. Van Roey, J. van der Donk and P. E. Lagasse: "Beam-propagation method: analysis and assessment," J. Opt. Soc. Am., **71** (1981) 803-810.

11) A. Bamberger, F. Coron and J.-M. Ghidaglia: "An analysis of the B. P. M. Approximation of the Helmholtz Equation in an Optical Fiber," Math. Modeling Numer. Anal., **21** (1987) 405-424.

12) A. Hasegawa and Y. Kodama: "Signal transmission by optical solitons in monomode fiber," Proc. IEEE, **69** (1981) 1145-1150.

13) D. Yevick and B. Hermansson: "Soliton Analysis with the Propagating Beam Method," Opt. Commun., **47** (1983) 101-106.

14) K. J. Blow and D. Wood: "Theoretical description of transient simulated Raman scattering in optical fibers," IEEE J. Quantum Electron., **25** (1989) 2665-2673.

15) Y. Chung and N. Dagli: "An assessment of finite difference beam propagation method," IEEE J. Quantum Electron., **26** (1990) 1335-1339.

16) B. Hermansson, D. Yevick, W. Bardyszewski and M. Glasner: "The unitarity of split-operator finite difference and finite-element methods: Applications to longitudinally varying semiconductor rib waveguides," IEEE J. Lightwave Technol., **8** (1990) 1866-1873.

17) P.C. Noutsios and G.L. Yip: "A finite-difference beam propagation method (BPM) analysis of a graded-index (GRIN) vertical directional coupler," Tenth Topical Meeting on GRADIENT-INDEX OPTICAL SYSTEMS (Grin) (4-6 Oct. 1992) Technical Digest, pp. 124-127.

18) P. Kaczmarski and P.E. Lagasse: "Bidirectional beam propagation method," Electron. Lett., **24** (1988) 675-676.

19) S.-T. Chu and S.K. Chaudhuri: "A finite-difference time-domain method for the design and analysis of guided-wave optical structures," IEEE J. Lightwave Technol., **7** (1989) 2033-2038.

20) S.-T. Chu and S.K. Chaudhuri: "Combining modal analysis and the finite-difference time-domain method in the study of dielectric waveguide problems," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **38** (1990) 1755-1760.

21) S.-T. Chu, S.K. Chaudhuri and J.W.Y. Lit: "Time-explicit simulation of wave interaction in optical waveguide crossings at large angles," Appl. Opt., **30** (1991) 1464-1470.

22) K.S. Yee: "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans. Antennas Propag., **AP-14** (1966) 302-307.

23) W.P. Huang, S.T. Chu, A. Gross and S.K. Chaudhuri: "A scalar finite-difference time-domain approach to guided-wave optics," IEEE Photon. Technol. Lett., **3** (1991) 524-526.

24) R.M. Joseph, S.C. Hagness and A. Taflove: "Direct time integration of Maxwell's equations in linear dispersive media with absorption for scattering and propagation of femtosecond electromagnetic pulses," Opt. Lett., **16** (1991) 1412-1414.

25) P.M. Goorjian and A. Taflove: "Direct time integration of Maxwell's equations in nonlinear dispersive media for propagation and scattering of femtosecond electromagnetic solitons," Opt. Lett., **17** (1992) 180-182.

26) G. Eichmann: Quasi-geometric optics of media with inhomogeneous index of refraction," J. Opt. Soc. Am., **61** (1971) 161-168.

27) M. Eve: "The use of path integrals in guided wave theory," Proc. R. Soc. Lond., **A 347** (1976) 405-417.

28) R.J. Hawkins: "Propagation properties of single-mode dielectric waveguide structures: a path integral approach," Appl. Opt., **26** (1987) 1183-1188.

29) T. Troudet and R.J. Hawkins: "Monte Carlo simulation of the propagation properties of single-mode dielectric waveguide structures," Appl. Opt., **27** (1988) 765-773.

30) 早田和弥，小柴正則："一般化された非線形シュレディンガー方程式の径路積分表示—光ソリトン問題への適用—"，電子情報通信学会論文誌 C-I, **J 73-C-I** (1990) 771-779.

31) J. Satsuma and N. Yajima: "Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media," Suppl. Prog. Theor. Phys., No. 55 (1974) 284-306.