

研 究**反復法を用いたフーリエ振幅からの複素物体の回復**

高城 洋明*・高橋 徹**

* 九州工業大学電子工学教室 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

** 大分工業高等専門学校電気工学科 〒870-01 大分市大字牧 1666

(1993年12月1日受付, 1993年12月27日受理)

**Recovery of a Complex Object from Its Fourier Modulus
Using an Iterative Fourier-Transform Algorithm**

Hiroaki TAKAJO* and Tohru TAKAHASHI**

* Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1, Sensuicho, Tobata-ku Kitakyushu 804** Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,
1666, Maki, Oita 870-01

(Received December 1, 1993; Accepted December 27, 1993)

The iterative Fourier transform algorithm commonly consists of the error-reduction algorithm and the hybrid input-output algorithm (HIO). Although there is little doubt that this algorithm is the most robust method for recovering an object from its Fourier modulus, it sometimes suffers from the stagnation problem. Recently we discussed the recovery of a real-valued object by means of the iterative algorithm and showed that, if one executes HIO alone using the feedback constant whose value is considerably smaller than one, one can overcome the stagnation problem and thus can get to the solution. In this paper we clarify the behavior of HIO when it applied to the recovery of a complex-valued object and show that, even in the case of a complex-valued object, one can get to the correct solution by executing HIO in the same manner as in the case of a real-valued object.

1. はじめに

物体のフーリエ振幅と、いくつかの先験的情報から物体そのものを回復する技術が天体スペックル干渉法や、波面センシングなどの分野で必要とされている。この方法の中でも強力な方法の一つに Fienup によって提案されたフーリエ反復法がある¹⁾。このフーリエ反復法は、フーリエ領域における拘束条件と、物体領域における拘束条件の両方を満足させるようにフーリエ変換とフーリエ逆変換を繰返し適用して、物体そのものを推定する方法である。この方法は測定ノイズに対する影響に強く、また先験的知識を簡単に取り込めるなどの特長を有する。ところがこの方法は、フーリエ振幅にノイズ成分がない場合でさえも時として近似的な物体ではあるが回復すべき物体以外の物体に収束することがあると一般に認

識されている¹⁻⁸⁾。特に回復すべき物体が複素物体である場合には、先験的情報として物体の非負性を用いることができないので、この問題が顕著に生じるものと考えられている⁹⁾。

本論文の目的は、少なくともフーリエ振幅にノイズ成分の存在しないときには、フーリエ反復法の使用法を工夫することによって回復すべき複素物体を正しく得ることが可能であることを示し、一般のフーリエ反復法に対する認識を深めることにある。

すでに我々は物体が実数物体の場合に対して、フーリエ反復法の基本となる error-reduction アルゴリズム (ER) についての検討を加え¹⁰⁾、さらに通常 ER と組み合わせられて補助的に用いられる hybrid input-output アルゴリズム (HIO) の挙動を解析し、小規模物体を用いたシミュレーションによって具体的にその能力を示し

た¹¹⁾.

本論文においては、回復すべき物体が複素物体である場合に対しても、HIOが、そのフィードバック定数を1に比べて十分小さくして単独で用いられるならば、物体の回復能力を有することを示す。まず第2章においてその挙動を解析し、第3章においてシミュレーションを用いて具体的にその能力を検証する。最後に第4章でまとめを行う。

2. HIOの挙動

回復すべき複素物体 (以後原物体と呼ぶ) を $f(x, y)$ とおく。サンプル点の座標 (x, y) は $N \times N$ であるものとする。このときフーリエ変換 $F(u, v)$ を

$$\begin{aligned} F(u, v) &= |F(u, v)| \exp \{i\phi(u, v)\} = \mathcal{F}\{f(x, y)\} \\ &= \sum_{x, y} f(x, y) \exp \{-i2\pi(ux + vy)/N\} \quad (1) \end{aligned}$$

によって定義する。ここで (u, v) はフーリエ領域の空間周波数を表している。 $\phi(u, v)$ は物体のフーリエ位相である。フーリエ反復法は、測定によって得られるフーリエ振幅 $|F(u, v)|$ から物体 $f(x, y)$ を (したがって位相 $\phi(u, v)$ を) 回復しようとするものである。このとき物体に対する先験的知識 (物体領域の拘束条件) として複素物体に対しては通常サポート条件のみが用いられる。サポートは、物体のエネルギーがゼロとは異なる可能性のあるサンプル点の集合である。フーリエ振幅が既知であるということは物体の自己相関が既知であるということであるので、最も曖昧なサポートは $N/2 \times N/2$ の大きさである。

フーリエ反復法は物体に対してフーリエ変換と逆変換を行って、フーリエ領域と物体領域の拘束条件を繰返し適用することにより物体を原物体に収束させようとする方法である。フーリエ変換される物体を入力物体と呼び、入力物体のフーリエ振幅を測定によって得られたフーリエ振幅によっておきかえて逆フーリエ変換された物体を出力物体と呼ぶことにすると、フーリエ反復法の基本となるERでは、繰返し回数 $m+1$ 回目の入力物体 $g_{m+1}(x, y)$ が m 回目の出力物体 $g'_m(x, y)$ を用いてサポート条件から

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (2)$$

と決定される。ここで D はサポートを表す。なお物体 $g(x, y)$ のフーリエ変換を $G(u, v)$ と記し、フーリエ位相を $\theta(u, v)$ と記す。すなわち

$$G(u, v) = |G(u, v)| \exp \{i\theta(u, v)\} = \mathcal{F}\{g(x, y)\} \quad (3)$$

である。ERの収束の評価に用いられる関数として、

フーリエエラー E_{Fm} :

$$\begin{aligned} E_{Fm} &= \left[\frac{\sum_{u, v} \{|F(u, v)| - |G_m(u, v)|\}^2}{\sum_{u, v} |F(u, v)|^2} \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{\varepsilon_{Fm}^2}{N^{-2} \sum_{u, v} |F(u, v)|^2} \right]^{1/2}, \quad (4) \end{aligned}$$

およびオブジェクトエラー E_{Om} :

$$\begin{aligned} E_{Om} &= \left[\frac{\sum_{(x, y) \in D} |g'_m(x, y)|^2}{\sum_{x, y} |g'_m(x, y)|^2} \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{\varepsilon_{Om}^2}{\sum_{x, y} |g'_m(x, y)|^2} \right]^{1/2} \quad (5) \end{aligned}$$

が用いられる。ERにおいてはよく知られているように、繰返し回数とともにエラーは増加せず、

$$E_{Fm} \geq E_{Om} \geq E_{F, m+1} \quad (6)$$

が成り立つ¹¹⁾。しかしながらこのことはエラーのゼロへの収束を保証するものではないので、原物体とは異なる物体への収束の可能性 (エラーが極小となる物体への収束) を否定できない。そこでERの困難を克服し収束を早める方法としてFienupによってHIOが導入された¹¹⁾。

HIOは繰返し回数 $m+1$ 回目の入力物体 $g_{m+1}(x, y)$ を

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ g_m(x, y) - \beta g'_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (7)$$

と定める方法である。 β はフィードバック定数で $0 \sim 1$ のあいだの実数値が用いられる。HIOは収束の保証がないと信じられてきたため、通常HIOはERと組み合わせられて用いられる^{1,9)}。ERとHIOを組み合わせる方法では、 β の値はアルゴリズムの収束には強く影響しないと考えられており、0.5から1.0のあいだの値が用いられる⁹⁾。これに対して我々は本報告において、複素物体に対してもHIOが通常の用いられ方と異なって、そのフィードバック定数 β を1に比べて十分小さくして単独で用いられるならば、解を得る能力を有することを示す。

そこで β をゼロに近づけたときのHIOをIHIO (infinitesimal HIO) と呼ぶことにする。IHIOの挙動を知るために(7)式を書き換える。 ε_{Fm}^2 は入力物体の関数である。そこでこの偏微分係数を考えると(4)式の定義から

$$\frac{\partial(\varepsilon_{Fm}^2)}{\partial \operatorname{Re}\{g_m(x, y)\}} = 2 \operatorname{Re}\{g_m(x, y) - g'_m(x, y)\}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon_{Fm}^2)}{\partial \operatorname{Im}\{g_m(x, y)\}} = 2 \operatorname{Im}\{g_m(x, y) - g'_m(x, y)\} \quad (9)$$

となることが導かれる。ただし $\text{Re}\{\cdot\}$ 、および $\text{Im}\{\cdot\}$ は各々 $\{\cdot\}$ の実数部分および虚数部分を表す。(8)、(9)式から、出力物体は

$$g'_m(x, y) = g_m(x, y) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{Fm^2})}{\partial \text{Re}\{g_m(x, y)\}} + i \frac{\partial(\varepsilon_{Fm^2})}{\partial \text{Im}\{g_m(x, y)\}} \right] \quad (10)$$

と表すことができる。ただし i は虚数単位である。ここで演算子 $\nabla_{g_m(x, y)}$ を

$$\nabla_{g_m(x, y)} \equiv \frac{\partial}{\partial \text{Re}\{g_m(x, y)\}} + i \frac{\partial}{\partial \text{Im}\{g_m(x, y)\}} \quad (11)$$

と定義すると(7)式は

$$g_{m+1}(x, y) = g_m(x, y) - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{ll} \nabla_{g_m(x, y)} \{\varepsilon_{Fm^2}\} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{array} \right\} - \beta \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (x, y) \in D \\ g'_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{array} \right\} \quad (12)$$

と表すことができる。この式において、入力物体の ε_{F^2} が極小となって第2項がゼロに近い値にならない限り、右辺第3項は摂動項とみなすことができる。そこでまず第3項を強制的にゼロとしたアルゴリズムの挙動を考慮することにする。このとき $m+1$ 回目の入力物体は

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g_m(x, y) - \frac{1}{2} \nabla_{g_m(x, y)} \{\varepsilon_{Fm^2}\} & (x, y) \in D \\ g_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (13)$$

と表すことができる。このアルゴリズムはサポート外の値を一定に保つという意味において ER の拡張とみなすことができるので GER (generalized ER) と呼ぶことにする。GER は繰返しごとに ε_{F^2} が単調減少して

$$\varepsilon_{Fm^2} \geq \varepsilon_{F, m+1^2} \quad (14)$$

となることを、物体が実数である場合と同様の議論を行うことによって¹¹⁾示すことができる。したがって GER は ε_{F^2} の極小となる物体に収束する。このとき(13)式および(8)、(9)式から、

$$g_m(x, y) = g'_m(x, y) \quad (x, y) \in D \quad (15)$$

が成り立つ。

以上のことから IHIO は(12)式において右辺第2項が第3項よりも支配的なあいだは GER の収束物体をめざすことがわかる。こうして(15)式に近い状態となると(12)式の第3項による影響が現れるので、(12)式は

$$g_{m+1}(x, y) = g_m(x, y) - \beta \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (x, y) \in D \\ g'_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{array} \right\} \quad (16)$$

と近似して表すことができる。ここで任意の物体に対してサポート内の値を強制的にゼロとした物体を添字 ND をつけて表すことにすると(16)式は簡単に

$$g_{m+1}(x, y) = g_m(x, y) - \beta g'_m \text{ND}(x, y) \quad (17)$$

と表される。ところで $g'_m \text{ND}(x, y)$ のフーリエ係数を $G'_m \text{ND}(u, v)$ とおくと、 ε_{0m^2} に対して(5)式から

$$\frac{\partial(\varepsilon_{0m^2})}{\partial \theta_m(u, v)} = -\frac{2}{N^2} \text{Im} [G'_m(u, v) \{G'_m \text{ND}(u, v)\}^*], \quad (18)$$

$$\delta \varepsilon_{0m^2} \{\theta_m(u, v) \rightarrow \theta_m(u, v) + \pi\}$$

$$= -\frac{4}{N^2} \text{Re} [G'_m(u, v) \{G'_m \text{ND}(u, v)\}^*]$$

$$+ \frac{4N\bar{D}}{N^4} |F(u, v)|^2 \quad (19)$$

となることを導くことができる。ただし $\theta_m(u, v)$ は $g_m(x, y)$ および $g'_m(x, y)$ のフーリエ位相であり、 $\delta \varepsilon_{0m^2}$ は周波数 (u, v) の位相を π 反転したときの ε_{0^2} の変化を表す。 $N\bar{D}$ はサポート外のサンプル点の数である。また添字の*は複素共役を表すものとする。したがって(17)式のフーリエ変換は

$$G_{m+1}(u, v) = G_m(u, v) + \beta \left[\frac{N^2}{4|F(u, v)|^2} \delta \varepsilon_{0m^2} - \frac{N\bar{D}}{N^2} \right] G'_m(u, v) \cdots a - i\beta \frac{N^2}{2|F(u, v)|^2} \frac{\partial \varepsilon_{0m^2}}{\partial \theta_m(u, v)} G'_m(u, v) \cdots b \quad (20)$$

と表すことができる。このときの各項の関係を模式的に Fig. 1 に示す。右辺の第2項は $G_m(u, v)$ と $\text{mod } \pi$ の同位相の項であるので入力物体のフーリエ振幅を変化させる項である。このことは第2項が入力物体のフーリエ位相を変化させるときには π の変化のみを生じさせることを意味している。一方第3項は $G_m(u, v)$ と $\pi/2$ 異なる項であり、その符号に注意すると入力物体のフーリエ位相を ε_{0^2} が減少するように変化させる項であることがわかる。したがって IHIO は GER の収束物体に沿って進み、(20)式の右辺第3項がゼロとなる物体に到達する。このとき Fig. 1 からわかるように、第2項の振幅が $|G_m(u, v)|$ よりも小さいときは位相は変化せず

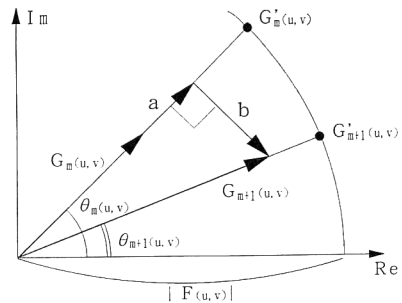


Fig. 1 Relation among the terms $G_{m+1}(u, v)$, $G_m(u, v)$, a , and b appearing in eq. (20).

出力物体は $g'_m(x, y)$ に留まり出力停滞状態となる。そこで ε_0^2 が極小となって(18)式の値がゼロとなる出力物体を出力停滞物体と呼ぶことにする。

出力停滞物体 ($g'_s(x, y)$ と記す) は、そのサポート内の値をゼロとした物体 ($g'_s^{ND}(x, y)$ と記す) とフーリエ位相が $\text{mod } \pi$ の同位相となる物体であることが(18)式からわかる。ここで物体の一部分のエネルギーは物体全体のエネルギーよりも大きくなることはないということから、 $g'_s^{ND}(x, y)$ のフーリエ位相の内少なくとも一つの周波数の位相は $g'_s(x, y)$ のフーリエ位相と同位相であることを示すことができる。したがって出力停滞状態においては、入力物体のフーリエ振幅の内少なくとも一つの周波数の振幅は繰返し回数とともに小さくなる。このことはその周波数のフーリエ位相が、ある繰返し回数で必ず π 反転を起こすことを意味している。すなわち出力停滞状態においては入力物体のフーリエ振幅が繰返しごとに $\beta |G'_s^{ND}(u, v)|$ ずつ変化するので、必ずある周波数のフーリエ位相が π 反転を生じ出力停滞状態から脱出する。出力停滞物体が求めるべき解であるときにはサポート外の値がゼロであるので、入力物体は変化せずアルゴリズムは収束状態となる。

以上のことから IHIO は以下の挙動を示すことがわかる。

- (1) GER の収束状態すなわち(15)式の成り立つ状態となるように進む
- (2) GER の収束物体に沿って(15)式の状態を保ちながら進み出力停滞状態となる。
- (3) 出力停滞物体が解でないときには、ある周波数のフーリエ位相に π 反転を生じ出力停滞状態から脱出する。

IHIO は上記(1)~(3)の挙動を解に収束するまで繰返すので、最終的に解に到達することができる。すなわち IHIO は解に到達する能力を有する。

3. シミュレーション

前章において IHIO が原理的に解に到達する能力を有することを示した。実際には β の値には有限な値を用いなければならない。Fig. 2 に 32×32 の規模の物体(サンプル空間は 64×64) の回復を HIO を単独で $\beta = 0.2$ として用いて試みたときのオブジェクトエラー E_{Om} の繰返し回数に対する変化を示す。原物体の位相は $-\pi$ から π までの一様乱数分布とした。サポートは最も先験的知識の少ない状態とするために 32×32 とした。測定フーリエ振幅として原物体のフーリエ振幅を用いてノ

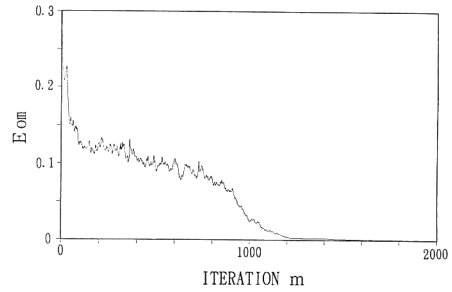


Fig. 2 E_{Om} vs the iteration number m in the case of an 32×32 object and $\beta = 0.2$.

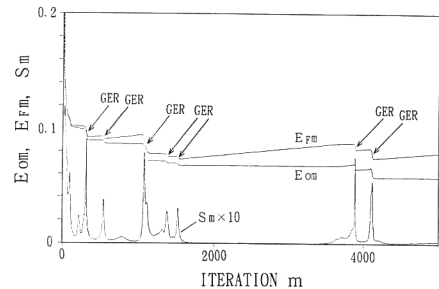


Fig. 3 E_{Om} , E_{Fm} , and S_m vs the iteration number m in the case of an 8×8 object and $\beta = 0.0001$.

イズ成分は付加していない。巨視的な傾向として E_{Om} が繰返し回数とともに徐々に減少していることがわかる。そして約 2000 回の繰返し回数で解に収束している。 64×64 の物体の規模までに対する我々のシミュレーションにおいては、 β が 0.2 以下であればすべての場合に解に到達することができた。

HIO の IHIO 的挙動を検証するために、 β の値を 0.0001 として 8×8 の規模の物体の回復を行った場合の例を Fig. 3 に示す。 E_{Om} , E_{Fm} および入力物体と出力物体のサポート内の偏差

$$S_m = \left[\frac{\sum_{(x,y) \in D} |g_m(x, y) - g'_m(x, y)|^2}{\sum_{x,y} |g'_m(x, y)|^2} \right]^{1/2} \quad (21)$$

の繰返し回数に対する変化を示している。IHIO の挙動において GER 的挙動を示す部分では、(12)式右辺の第 2 項が第 3 項よりも支配的要素となって進行するので(14)式がほぼ成立すると考えられる。したがって E_F は単調に減少するはずである。このことが図中で GER と示した部分に現れている。こうしてアルゴリズムが(15)式を近似的に満たす状態となると、(12)式において右辺の第 3 項が入力物体のフーリエ位相の変化の支配的要素となり、(15)式をほぼ保った状態で出力停滞物体をめざ

して進む。したがってこの間 S_m の値はゼロに近い値にとどまっている。こうして出力停滞物体に到達し出力停滞状態となる。ところがこのとき E_{om} は一定となるが E_{fm} は変化している。すなわち出力停滞物体が解でない場合には出力物体は停滞しつつも入力物体のサポート外の値が変化し続けるので、ある繰返し回数で出力停滞状態から脱出するのである。この挙動を繰返して最終的に解に到達する。このように HIO が IHIO 的挙動を示すことを顕著に見るためには、物体の規模が大きくなるほど β をゼロに近い小さな値にしなければならない。これは物体の規模が大きいかほど出力停滞物体の数が増え、またエラー関数の分布が複雑になるからであると我々は考えている。

4. ま と め

複素物体のフーリエ振幅が既知であるときにフーリエ反復法を用いて物体を回復する場合、従来補助的に用いられてきた HIO を単独でしかもフィードバック定数 β を 1 に比べて十分小さくして用いるならば、少なくともフーリエ振幅にノイズの存在しないときには、解に到達することが可能であることを明らかにした。アルゴリズムを用いるときには β の値に有限な値を用いなければならないが、 β の値が小さいほど解への到達の可能性も向上する。しかしながらシミュレーションの結果は β の値が 0.2 以下であれば解に到達可能であることを示している。

実際の物体の回復への応用においてはフーリエ振幅にノイズ成分が存在する場合の有効な物体回復法を開発しなければならないが、このとき本研究によって明らかと

なった HIO の挙動の知識が役立つものと確信する。

文 献

- 1) J.R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: a comparison," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 2758-2769.
- 2) J.R. Fienup and C.C. Wackerman: "Phase-retrieval stagnation problems and solutions," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3** (1986) 1897-1907.
- 3) C.C. Wackerman and A.E. Yagle: "Use of Fourier domain real-plane zeros to overcome a phase-retrieval stagnation," *J. Opt. Soc. Am. A*, **8** (1991) 1898-1904.
- 4) J. N. Cederquist, J. R. Fienup, C. C. Wackerman, S. R. Robinson and D. Kryskowski: "Wave-front phase estimation from Fourier intensity measurements," *J. Opt. Soc. Am. A*, **6** (1989) 1020-1026.
- 5) J.H. Seldin and J.R. Fienup: "Numerical investigation of the uniqueness of phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **7** (1990) 412-427.
- 6) N. Nakajima: "Comparison of phase retrieval method in computer experiments," *Jpn. J. Appl. Phys.*, **27** (1988) 244-252.
- 7) M. Nieto-Vesperinas, R. Navarro and F.J. Fuentes: "Performance of a simulated-annealing algorithm for phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5** (1988) 30-38.
- 8) C. R. Parker and P. J. Bones: "Convergence of iterative phase retrieval improved by utilizing zero sheets," *Opt. Commun.*, **92** (1992) 209-214.
- 9) J.R. Fienup: "Reconstruction of a complex-valued object from the modulus of its Fourier transform using a support constraint," *J. Opt. Soc. Am. A*, **4** (1987) 118-123.
- 10) 高橋 徹, 高城洋明, 待鳥誠範, 永野直広: "繰返し型位相回復アルゴリズムにおける停滞問題の数値シミュレーションによる考察", *光学*, **21** (1992) 119-127.
- 11) 高城洋明, 高橋 徹: "位相回復におけるハイブリッドインプットアウトプット・アルゴリズムの能力について", *光学*, **22** (1993) 419-427.