

# 研究

## フーリエ反復法を用いた位相回復におけるノイズの影響

高城 洋明\*・高橋 徹\*\*・野津 剛\*

\* 九州工業大学電子工学教室 T804 北九州市戸畠区仙水町 1-1

\*\* 大分工業高等専門学校電気工学科 T870-01 大分市大字牧 1666

(1994年2月4日受付, 1994年4月5日受理)

### The Effect of Noise on the Phase Retrieval by Means of an Iterative Fourier-Transform Algorithm

Hiroaki TAKAJO,\* Tohru TAKAHASHI\*\* and Takashi NOZU\*

\* Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,  
1-1, Sensuicho, Tobata, Kitakyushu 804

\*\* Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,  
1666, Maki, Oita 870-01

(Received February 4, 1994; Accepted April 5, 1994)

Error-reduction algorithm (ER) is the most fundamental version of the iterative Fourier-transform algorithm for retrieving an object from its Fourier modulus or, equivalently, for retrieving its Fourier phase. The purpose of this paper is to clarify the effect of noise contained in the measured Fourier modulus on the performance of ER paying particular attention to the stagnation phenomena from which ER suffers even in the noise free case. To this end, we first investigate theoretically the behavior of ER in the neighborhood of the objects whose Fourier modulus takes the value zero at a certain spatial frequency and then carry out the computer simulations for retrieving an  $2 \times 2$  object with L-shaped support using the support and the nonnegativity constraints as the object domain constraints. It is shown that noise can give rise to the imperfect stagnation.

### 1. はじめに

物体のフーリエ振幅と、いくつかの先見的情報から物体そのものを回復する技術、いわゆる位相回復技術が、電子顕微鏡や天体観測あるいはX線結晶学など多くの分野で必要とされている。これまでに種々の位相回復法が提案されているが、適用可能なための制約条件が少ない、2次元物体にも容易に適用できるなどの理由から、現在最もよく用いられているのはフーリエ反復法であろう<sup>1)</sup>。しかしながらこの方法は時として回復すべき物体に到達していないにもかかわらず停滞するという問題に悩まされてきた<sup>1-5)</sup>。フーリエ反復法にはこれまでいくつものものが開発されているが、それらの内で代表的なのはエラーリダクションアルゴリズム (ER) とハイブリッドインプットアウトプットアルゴリズム (HIO) で

ある。これら二つのアルゴリズムは互いに組み合わせて用いるのが最も有効であると考えられてきたが、停滞はこの組み合わせアルゴリズムにおいても生じる。

最近になって我々は、少なくともフーリエ振幅にノイズが存在しない場合には、フーリエ反復法の使用法を工夫することにより、停滞問題が解決できること、すなわち通常はERと組み合わせて用いられるHIOを、単独でかつフィードバック定数を1に比べて十分小さくして用いるなら、回復すべき物体を正しく得ることができる事を示した<sup>6)</sup>。言うまでもなく実際に測定されるフーリエ振幅にはノイズが存在する。したがって今後取り組むべき重要な問題の一つは、ノイズがフーリエ反復法に与える影響を明らかにし、ノイズが存在する場合にも有効な位相回復アルゴリズムを確立することである。

ERはフーリエ反復法のなかで最も基本的なアルゴリ

ズムである。我々のこれまでの研究でも明らかなように、ER の挙動の理解なしには HIO など他のフーリエ反復アルゴリズムの挙動を理解することは不可能である。先に我々は、ER の能力を明らかにするため、 $2 \times 2$  の L 型物体を回復する計算機シミュレーションを、フーリエ振幅にノイズが存在しない場合について行った<sup>7)</sup>。それにより、ER には回復すべき物体を含め複数個の収束物体が存在すること、収束物体の違いによって初期物体の集合を分割することができるここと、停滞には完全なる停滞と不完全な停滞が存在することなどがわかった。本論文の目的は、 $2 \times 2$  の L 型物体を回復する計算機シミュレーションを、ノイズが存在する場合について行い、ノイズが ER の性能にいかなる影響を与えるか、特に収束物体の個数や初期物体の集合の分割にいかなる影響を与えるかを明らかにすることである。

## 2. 勾配ベクトルの不連続性

回復すべき物体（以後原物体と呼ぶ）を  $f(x, y)$  と表し、そのフーリエ変換を  $F(u, v)$  と表す。 $f(x, y)$  は実数で非負であるとする。 $F(u, v)$  は DFT を用いて

$$\begin{aligned} F(u, v) &= |F(u, v)| \exp[i\phi(u, v)] = \mathcal{F}\{f(x, y)\} \\ &= \sum_{x, y} f(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)/N] \quad (1) \end{aligned}$$

で与えられる。逆変換は

$$f(x, y) = N^{-2} \sum_{u, v} F(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)/N] \quad (2)$$

である。ただし、サンプル点数は  $N \times N$  であるとし、 $x, y, u, v$  はそれぞれ  $-(N/2)+1, \dots, 0, \dots, N/2$  の値をとるものとする。我々は、 $|F(u, v)|$  からの  $f(x, y)$  の回復を考察する。したがって、 $|F(u, v)|^2$  にエリアシングが生じないことの必要性から  $f(x, y)$  は  $(N/2) \times (N/2)$  の範囲でのみゼロと異なる値をとるものとする。

フーリエ反復法の概略は以下の通りである。 $m$  回目の入力物体  $g_m(x, y)$  をフーリエ変換し、 $G_m(u, v) = |G_m(u, v)| \exp[i\theta_m(u, v)]$  を生成する。 $G_m(u, v)$  にフーリエ領域の拘束条件を適用する。すなわち、 $G_m(u, v)$  の振幅を測定によって得られる原物体のフーリエ振幅  $|F(u, v)|$  と置き換える。こうして得られた  $G'_m(u, v)$  を逆変換して  $g'_m(x, y)$ を得る。 $g'_m(x, y)$  を出力物体と呼ぶ。 $g'_m(x, y)$  に物体領域の拘束条件を適用して、 $m+1$  回目の入力物体を得る。以後、この一連の操作を必要な回数だけ繰返す。

ER では  $m+1$  回目の入力物体  $g_{m+1}(x, y)$  を次式

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (3)$$

によって生成する。ただし、 $D$  は物体領域の拘束条件を満足しているサンプル点の集合である。原物体の推定物体として採用されるのは、出力物体ではなく入力物体である。

さて、 $N \times N$  点でサンプルされた物体は一般に  $N^2$  次元空間の点によって表すことができる。ER の入力物体は物体領域の拘束条件を満足するので、その集合は  $N^2$  次元空間における部分空間を形成する。本論文では、この部分空間を入力物体空間と呼ぶ。また、物体領域の拘束条件としてサポート条件と非負条件を用いる。サポート内のサンプル点数を  $N_D$  とするとき、サポート条件だけを用いるならば、入力物体空間は  $N_D$  次元空間となる。本論文の場合には非負条件も用いるので、入力物体空間は  $N_D$  次元空間のうちの第1象限、すなわち位置座標のどれもが負にならない点の集合、によって構成される。Fienup に従って、フーリエ・エラーを

$$\varepsilon_{F_m}^2 = N^{-2} \sum_{u, v} [|G_m(u, v)| - |F(u, v)|]^2 \quad (4)$$

によって定義する。このとき次式

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\varepsilon_{F_m}^2)}{\partial g_m(x, y)} \\ &= g'_m(x, y) - g_m(x, y) \quad (5) \end{aligned}$$

で与えられる  $v(x, y)$  を成分にもつ  $N^2$  次元ベクトル  $\mathbf{v}$  を考えることができる。すでに明らかにしたように ER の挙動はベクトル  $\mathbf{v}$  の入力物体空間への射影<sup>\*1</sup>によって制御される<sup>7)</sup>。 $\mathbf{v}$  を勾配ベクトル、その入力物体空間への射影を射影勾配ベクトルと呼ぶことにする。 $g_m(x, y)$  と  $g'_m(x, y)$  はそれぞれ  $G_m(u, v)$  と  $G'_m(u, v)$  のフーリエ逆変換であることから

$$\begin{aligned} v(x, y) &= N^{-2} \sum_{u, v} [|F(u, v)| - |G_m(u, v)|] \\ &\quad \times \exp[i\theta_m(u, v)] \exp[i2\pi(ux + vy)/N] \quad (6) \end{aligned}$$

となることがわかる。

ある物体のフーリエ変換がある周波数でゼロとなるとき、その物体をゼロ物体と呼ぶことにする。いま、 $g^{(0)}(x, y)$  が  $N^2$  次元空間内のゼロ物体であるとし、この物体の近傍での勾配ベクトルの振舞いを考察しよう。 $g^{(0)}(x, y)$  のフーリエ変換がゼロとなる周波数を  $(u_0, v_0)$  とすれば、(6)式よりエルミート性を考慮して

\*1 物体の拘束条件として、サポート条件だけを用いる場合はもちろん、非負条件を併せて用いる場合も、入力物体空間は凸集合となる。したがって、いずれの場合も入力物体空間への射影は一意に決定される。

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = & N^{-2} \sum_{(u, v) \neq (u_0, v_0), (-u_0, -v_0)} [ |F(u, v)| \\
 & - |G(u, v)|] \exp[i\theta(u, v)] \\
 & \times \exp[i2\pi(ux + vy)/N] \\
 & + 2N^{-2}|F(u_0, v_0)| \cos[\theta(u_0, v_0)] \\
 & + 2\pi(u_0x + v_0y)/N] \\
 & - 2N^{-2}|G(u_0, v_0)| \cos[\theta(u_0, v_0)] \\
 & + 2\pi(u_0x + v_0y)/N] \quad (7)
 \end{aligned}$$

を導くことができる。ただし、ここでは  $g_m(x, y)$  をしたがって  $G_m(u, v)$  を変数と考えることを考慮して、添え字  $m$  を省略した。 $g(x, y)$  が  $g^{(0)}(x, y)$  の近傍にあるとき、そのフーリエ振幅  $|G(u_0, v_0)|$  は極めて小さくなる。したがって、 $g^{(0)}(x, y)$  の近傍では、 $g(x, y)$  がわずかに変化しても、そのフーリエ位相  $\theta(u_0, v_0)$  は大きく変化する。しかも  $\theta(u_0, v_0)$  はゼロ物体  $g^{(0)}(x, y)$  の位置において不定となる。このため位相回復アルゴリズムでは、通常  $g^{(0)}(x, y)$  の位置における  $\theta(u_0, v_0)$  を強制的にゼロとせざるを得ない。すなわち、 $g^{(0)}(x, y)$  の近傍において  $\theta(u_0, v_0)$  は大きく、しかも不連続に変化すると予想される。ところで、 $g^{(0)}(x, y)$  の近傍において  $|G(u_0, v_0)|$  は小さくなるが  $|F(u_0, v_0)|$  は小さくなるとは限らない。このため(7)式の第2項は、第3項と異なり、 $g^{(0)}(x, y)$  の近傍での  $\theta(u_0, v_0)$  の変化の影響を受け、その結果勾配ベクトルにも不連続な変化がもたらされる。したがって、ゼロ物体近傍では ER の挙動が突然の変化を受ける可能性があり、この近傍での ER の挙動には注意を払う必要がある。

ゼロ物体の内で、そのフーリエ変換の  $u$  軸上と  $v$  軸上およびそれらと 45 度をなす軸上の最高周波数成分、すなわち  $(N/2, 0)$ ,  $(0, N/2)$ , および  $(N/2, N/2)$  成分のどれかがゼロとなる物体を第1種のゼロ物体、それ以外の周波数成分がゼロとなる物体を第2種のゼロ物体と呼ぶことにしよう。定義から明らかなように、第1種のゼロ物体には三つのグループが存在する。よく知られているように、実数物体の場合には、上記三つの最高周波数成分はいずれも実数である。このため、第1種のゼロ物体の各グループは  $N^2$  次元空間において  $N^2-1$  次元の部分空間を形成し、 $N^2$  次元空間はこれら各グループによってそれぞれ二つの領域に分割できる。これに対して、第2種のゼロ物体の各集合は  $N^2-2$  次元の部分空間を形成するので、これら各集合によって  $N^2$  次元空間を分割することはできない（例えば、3次元空間は2次元空間である平面によって二つの領域に分割できるが、1次元空間である直線によって二つに分割することはで

きない）。勾配ベクトルはゼロ物体の近傍において不連続に変化することは上に述べた通りであるが、特に第1種のゼロ物体の両側では、ゼロ物体によって分割されたそれぞれの領域の内側を向くことを我々は示すことができる<sup>7)</sup>。また、三つの最高周波数における位相は第1種のゼロ物体の両側で  $\pi$  だけ不連続に変化する。もしも ER の入力物体が射影勾配ベクトルでなく勾配ベクトルによって制御されるのなら、第1種のゼロ物体は ER が決して越えることができない境界となる。勾配ベクトルがゼロ物体の両側でそれぞれの領域の内側を向いているという事実は、射影勾配ベクトルもまたそれぞれの領域の内側を向いている確率が高いことを予想させる。

### 3. シミュレーションによる検討

ノイズの影響を検討するために、本節では次式

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

に示す  $2 \times 2$  の L型のサポートをもつ原物体を回復するシミュレーションを行う。ただし、 $a$ ,  $b$ ,  $c$  は正の実数であり、破線はサポートである。測定によって得られるデータは原物体のフーリエ振幅であるよりは、むしろフーリエ強度であるとし、フーリエ強度にはノイズ  $n(u, v)$  が加法的に含まれているとする。したがって、ノイズが存在する場合のフーリエ振幅  $|F_n(u, v)|$  は、

$$|F_n(u, v)| = \{ |F(u, v)|^2 + n(u, v) \}^{1/2} \quad (9)$$

となる。我々はフーリエ振幅に対するノイズの割合を次式

$$N_R = \left\{ \frac{\sum_{u, v} [|F_n(u, v)| - |F(u, v)|]^2}{\sum_{u, v} |F(u, v)|^2} \right\}^{1/2} \times 100\% \quad (10)$$

で定義する。サポートは正確にわかっているものとし、初期入力物体を

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$m$  回めの入力物体を

$$\mathbf{g}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_m & 0 & 0 \\ 0 & a_m & b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

と表す。ノイズが存在しない場合には、初期入力物体を正値に選べば、各回の入力物体もまた正値になる<sup>7)</sup>。こ

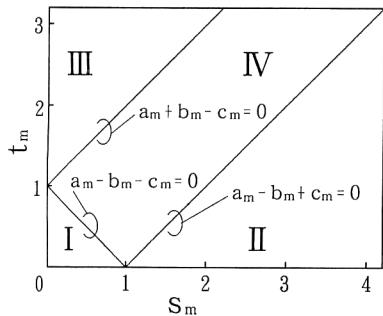


Fig. 1 Two dimensional representation of the input-object space.

のことと、位相回復において重要なのは物体の各点の値の比であることから、我々は各回の入力物体を Fig. 1 に示す  $s_m-t_m$  平面における点として表すことができる。すなわち、 $s_m-t_m$  平面は入力物体空間の 2 次元表示である。ただし、 $s_m=b_m/a_m$ 、 $t_m=c_m/a_m$  である。(12)式をフーリエ変換すれば容易にわかるように、第 1 種のゼロ物体が満たすべき条件は、

$$a_m - b_m + c_m = 0, \quad (13-1)$$

$$a_m + b_m - c_m = 0, \quad (13-2)$$

または、

$$a_m - b_m - c_m = 0, \quad (13-3)$$

であり、第 2 種のゼロ物体が満たすべき条件は、

$$a_m = b_m \text{ and } c_m = 0, \quad (14-1)$$

$$a_m = c_m \text{ and } b_m = 0, \quad (14-2)$$

または、

$$b_m = c_m \text{ and } a_m = 0, \quad (14-3)$$

である。したがって、第 1 種のゼロ物体の三つのグループは、Fig. 1 においては 3 本の直線によって表され、第 2 種のゼロ物体はこれら三つの直線が互いに交差する点によって表される。すなわち、第 2 種のゼロ物体は  $s_m$  軸上と  $t_m$  軸上および無限遠点につつ存在しており、それらは第 1 種のゼロ物体に含まれている。同図からわかるように、入力物体空間は第 1 種のゼロ物体の三つのグループによって四つの領域に分けることができ、我々はこれらの領域を領域 I, II, III, IV と呼ぶことにする。比較のため、まずノイズが存在しない場合のシミュレーション結果を Fig. 2 に掲げる。原物体は  $\mathbf{f}=(a, b, c)=(1, 1, 1)$  である。白丸で示された種々の初期入力物体から出発した場合に得られる各回の入力物体を直線で結んである。白四角は収束物体である。この図から、第 1 種のゼロ物体が ER の越えることができない境界を形成していること、領域 I, II, III, IV にはそれぞれ収束物体が一つずつ存在し領域 IV の収束物体は原物体であるこ

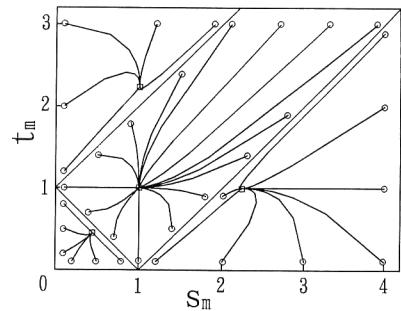


Fig. 2 Behavior of ER in the noise free case. Original object  $\mathbf{f}=(a, b, c)=(1, 1, 1)$ . (○): the initial inputs. (□): the convergence objects.

と、したがって、領域 I ~ III の初期物体から出発する限り ER は完全なる停滞を起こすことがわかる。文献 7) で示したように、Fig. 2 の結果は  $2 \times 2$  の L 型物体の場合の代表的な例である。

先に述べた通り、 $2 \times 2$  の L 型物体の場合、第 2 種のゼロ物体は第 1 種のゼロ物体に含まれている。そのために、第 2 種のゼロ物体が ER の動きに与える影響は、第 1 種のゼロ物体による影響に隠れてしまい、ER の越えることができない境界の形成、換言すれば ER の動きによる入力物体空間の領域分けには、第 1 種のゼロ物体だけが関わっていると考えて差し支えないことを Fig. 2 の結果は示している。本論文は位相回復におけるノイズの影響についての我々の研究の第 1 歩である。よく知られているように、L 型物体はフーリエ振幅とサポートが与えられれば一意に定まる。このように一意性が保証されていること、各回の入力物体を 2 次元平面に表示できること、ならびに第 2 種のゼロ物体の影響を無視できるため、入力物体空間における境界の形成が比較的簡単に議論できることが、 $2 \times 2$  の L 型物体を今回の研究対象に選んだ理由である。

Fig. 2 の例において、 $N_R=8.6\%$  のノイズを加えた場合の結果を Fig. 3 に示す。ただし、ノイズとして平均値がゼロの正規乱数を用いた。この図と Fig. 2 との比較から、ノイズが存在する場合も、入力物体空間の分割のされかたは変わらないことがわかる。すなわち Fig. 3 の場合も、入力物体空間は ER が越えることのできない四つの領域に分割され、各領域における収束物体の位置は移動しているものの、各領域の境界はやはり第 1 種のゼロ物体で構成されている。したがって、領域 IV の初期物体から出発する場合には原物体の妥当な推定を得ることができるが、それ以外の領域の初期物体から出発する場合には完全なる停滞が起きる。

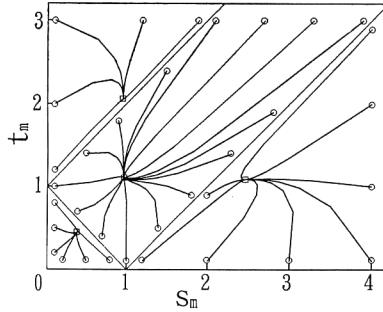


Fig. 3 Behavior of ER in the case where \$N\_R=8.6\%\$.

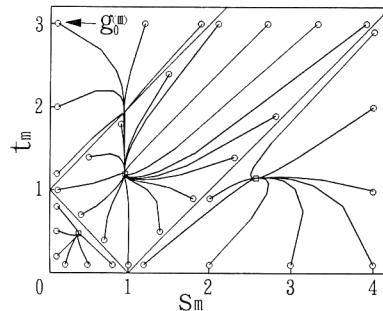


Fig. 4 Behavior of ER in the case where \$N\_R=13.3\%\$.

Fig. 4 は、ノイズをさらに大きくし、\$N\_R=13.3\%\$とした場合の結果である。この場合には領域ⅢとⅣの間で領域移動が起こっている。すなわち、Fig. 3 の時と異なり、ER は領域Ⅲの初期物体から出発しても領域Ⅳの収束物体に到達することができる。しかし二つの領域の間の境界形成に対するゼロ物体の影響は完全に消失したのではなく、ER は境界上の 1 点を通してだけ領域Ⅳに進入できる。これは、ノイズの増大とともに各領域の収束物体は領域内を移動するが、領域Ⅲの収束物体がついに領域Ⅳとの境界に極めて接近または到達したためであると考えられる。我々は、ノイズが存在しない場合にも、原物体によっては ER が領域移動をすることができるること、しかもこの場合 ER は不完全な停滞を起こしやすいこと、すなわち繰り返しによってフーリエ・エラーがほとんど変化しない状態が続くがやがては脱出できる停滞を起こしやすいことを示した<sup>7)</sup>。Fig. 4 の例において、同図に示す初期物体 \$g^{(m)\_0}\$ から出発した場合に得られる、正規化されたフーリエ・エラー

$$E_{Fm} = \left\{ \frac{\sum_{u,v} [(|G_m(u,v)| - |F_n(u,v)|)^2]}{\sum_{u,v} |F_n(u,v)|^2} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

と繰り返し回数との関係を Fig. 5 に示す。この例の場

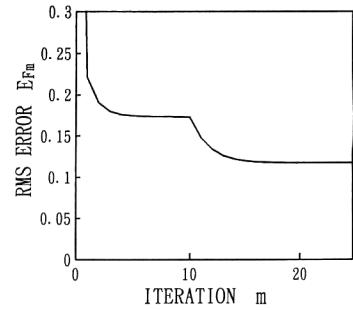


Fig. 5 RMS error \$E\_{Fm}\$ vs the number of iterations obtained in the simulation shown in Fig. 5 using \$g^{(m)\_0}\$ as the initial start.

合、領域移動は 9 回目の繰り返しで起こっている。\$E\_{Fm}\$ は領域移動を起こす前でほとんど変化せず、領域移動後は速やかに減少している。Fig. 4 と 5 は、ノイズが収束物体の位置を移動させることにより、領域移動を起こすことができること、ノイズにより起こされる領域移動の場合も不完全な停滞が生じやすいことを示している。

ここには掲げないが、ノイズによって収束物体が入力物体空間の三つの境界面、\$\alpha\_m=0, b\_m=0, c\_m=0\$ のどれかに到達する場合がある。しかしながら第 1 種のゼロ物体に到達した場合と異なり、ER はたとえノイズをさらに大きくしても、非負条件の存在のため、これらの面を越えていくことはできず、これらの面上に留まる。もしも \$\alpha\_m=0\$ の面上に留まる場合には、ER の動きの全過程を \$s\_m-t\_m\$ 平面上に描くことはできない。しかしこの場合にも、例えば \$(\alpha\_m/b\_m)-(c\_m/b\_m)\$ 平面を用いれば、ER の動きを 2 次元平面上に表示することは可能である。

#### 4. ま と め

本論文では、ER による位相回復に与えるノイズの影響を明らかにするため、\$2 \times 2\$ の L 型物体を回復する計算機シミュレーションを行った。

我々はまず、フーリエ・エラーについての勾配ベクトルが第 1 種および第 2 種のゼロ物体の近傍において不連続に変化すること、\$2 \times 2\$ の L 型物体の場合には第 2 種のゼロ物体の集合は第 1 種のゼロ物体の集合に含まれることを指摘した。

先に我々は、ノイズが存在しないときには、ER による回復物体の集合すなわち入力物体空間は、多くの場合第 1 種のゼロ物体を境界とする四つの領域に分割されること、それぞれの領域には一つずつ ER の収束物体が存在しそれらのうちの一つは原物体であること、原物体によっては ER はゼロ物体を越えて領域移動を起こし得る

こと、この場合不完全な停滞が起こりやすいことを示した。今回のシミュレーションによって、ノイズが特別大きくなる限り、入力物体空間の領域分けはノイズの存在によって基本的に変わらないこと、しかし収束物体そのもの、換言すれば収束物体の各領域における位置は変化することがわかった。また、収束物体の位置の変化の大きさは、一般的にノイズの増大とともに増大するが、収束物体が領域の境界に極めて近くなるかあるいは境界に到達した場合には、ERは領域移動を起こすこと、この場合不完全な停滞が起きやすいことがわかった。ゼロ物体の位置は物体のサポートによって決定され、サポートが変わらない限りノイズによって変化しない。したがって、今回のシミュレーション結果は、位相回復におけるサポート条件の役割と効果についての一つの考察を与えるものとも考えられる。

より大きなサイズの物体の場合には第2種のゼロ物体は第1種のゼロ物体に含まれるとは限らない。このような場合、入力物体空間はどのように領域分けされるであろうか、そのときノイズは領域分けにどのような影響を与えるであろうか。これらは今後の検討課題であるが、

今回得られた結果は、これらの課題を研究する基礎を与えるものと考えている。

## 文 献

- 1) J.R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: a comparison," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 2758-2769.
- 2) J.R. Fienup and C.C. Wackerman: "Phase-retrieval stagnation problems and solutions," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3** (1986) 1897-1907.
- 3) C.C. Wackerman and A.E. Yagle: "Use of Fourier domain real-plane zeros to overcome a phase retrieval stagnation," *J. Opt. Soc. Am. A*, **8** (1991) 1898-1904.
- 4) J.H. Seldin and J.R. Fienup: "Numerical investigation of the uniqueness of phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **7** (1990) 412-427.
- 5) N. Nakajima: "Comparison of phase retrieval methods in computer experiments," *Jpn. J. Appl. Phys.*, **27** (1988) 244-252.
- 6) 高城洋明, 高橋 徹: "位相回復におけるハイブリッドインプットアウトプット・アルゴリズムの能力について", *光学*, **22** (1993) 419-427.
- 7) 高橋 徹, 高城洋明, 待鳥誠範, 永野直広: "繰返し型位相回復アルゴリズムにおける停滞問題の数値シミュレーションによる考察", *光学*, **21** (1992) 119-127.