



半導体レーザーを用いた直交2周波光源の開発

棚橋 昌史・大谷 幸利・吉澤 徹

東京農工大学工学部 〒184 小金井市中町 2-24-16

(1994年3月23日受付, 1994年9月7日受理)

Development of a Light Source with Orthogonally Polarized Two-Frequency Beam from a Laser Diode

Atsushi TANAHASHI, Yukitoshi OTANI and Toru YOSHIKAWA

Faculty of Technology, Tokyo University of Agriculture and Technology,
2-24-16, Nakacho, Koganei 184

(Received March 23, 1994; Accepted September 7, 1994)

This paper describes a newly developed light source with orthogonally polarized two-frequency beam from a laser diode (LD) which is suitable for practical application such as optical heterodyne method. LD is characterized by frequency modulation which appears when injection current is changed. Frequency modulated light from LD is divided into two orthogonal linearly polarized beam by using polarization optics, and when a certain amount of optical path difference is given to them, time difference due to different path brings difference to frequencies between these beams. This frequency difference is proportional to the temporal interval and gradient of modulation wave. And the total power from the light source can be kept constant when another incoherent LD is added in order to compensate the power fluctuation.

1. はじめに

光ヘテロダイン干渉法などの応用においては光源に2周波ゼーマンレーザーを用いる方法や一般のレーザーに周波数シフタとして音響光学素子を配置する方法などが行われている。一方半導体レーザー (LD) を用いた計測法としてFMヘテロダイン干渉法が提案されている¹⁻⁵⁾。これらは LD の駆動電流変化による周波数変調 (FM) 特性を利用している点に特徴をもち, LD を使用するにあたり最大の利点である計測装置の小型化を可能にしている。筆者らも LD の FM 特性を利用した直交2周波光源を提案し, これをヘテロダイン干渉計に適用して複屈折測定および変位測定を試みてきた^{6,7)}。しかし LD は周波数変調だけでなく発振光出力も同時に変調されるため, 干渉信号の電気的な処理によって光出力変化を補正する必要があった⁶⁻⁸⁾。これは一般に干渉縞信号から位相情報を復調するためには正弦波状の干渉信号を必要とする。そこで電気的な処理をなくすために, 補助 LD

を用いて変調に伴う発振光出力変化を直接的に光の強度で補償した LD 直交2周波光源を新たに開発した。光源からの出射光が変調によらず一定であることは干渉計に用いるにあたり利用価値が高い。本論文では開発した光源が光ヘテロダイン計測用の光源として適切であることを実験的に考察する。

2. 直交2周波光の生成原理

直交2周波光を生成するために光学素子を **Fig. 1** に示すように配置する。入射光を45度の偏光面をもつ直線偏光とすると, 偏光ビームスプリッタ PBS1 で偏光角0度のp偏光成分と偏光角90度のs偏光成分に分けられる。s偏光成分は直角プリズム PR で反射され偏光ビームスプリッタ PBS2 でs偏光成分と再び合成される。そのため最終出射光は直交する偏光面をもつ直線偏光となっている。LDのFM特性は駆動電流変化に比例してその発振周波数が変化する特徴であり, 駆動電流変化を Δi , 角周波数変化を $\Delta\omega$ とすると次式のよう

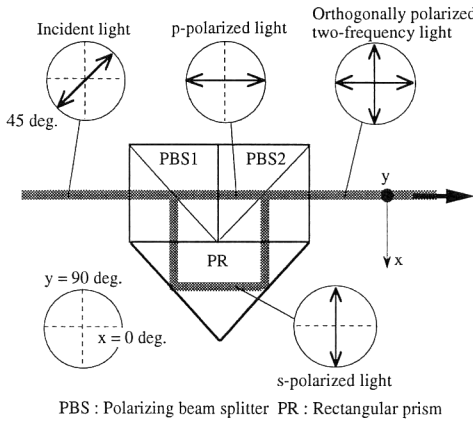


Fig. 1 Optical system for orthogonally polarized two-frequency light.

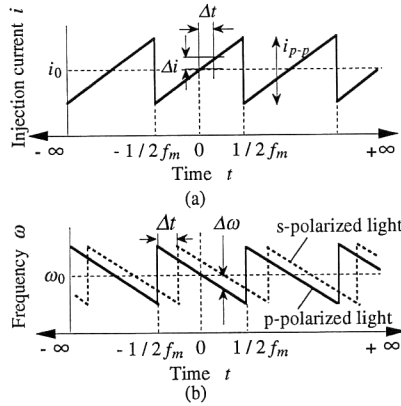


Fig. 2 (a) Modulated current injected to LD1. (b) Modulated frequency of light from LD1.

に表される。

$$\Delta\omega = 2\pi k \Delta i \quad (1)$$

k は周波数変調係数で負の値となり、発振同調内では一定とみなせる。本手法では **Fig. 2** (a) に示すように LD の駆動電流にランプアップ変調を施す。ここで s 偏光成分は p 偏光成分に対し時間的に遅れが生じている。この微小な時間遅れ Δt は p 偏光と s 偏光の光路差を D 、光速を c とすると次式のようなになる。

$$\Delta t = D/c \quad (2)$$

この微小時間 Δt の間に駆動電流は Δi 変化するので p 偏光成分と s 偏光成分は式 (1) に従う周波数差をもっており、次式のように表される。

$$\Delta\omega = 2\pi k i_{p-p} f_m \Delta t = \alpha \Delta t \quad (3)$$

$$\alpha = 2\pi k i_{p-p} f_m \quad (4)$$

i_{p-p} は **Fig. 2** (a) で示す駆動電流振幅、また f_m は変調周波数である。 $\Delta\omega$ は変調度 α により可変であり、とく

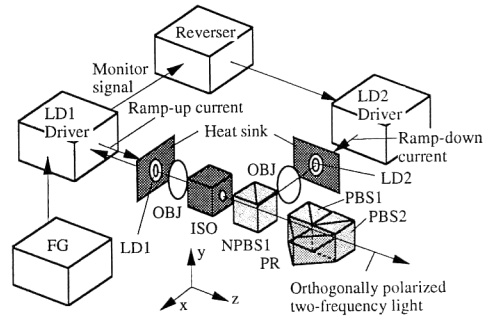
に i_{p-p} を

$$i_{p-p} = -\frac{2}{k \Delta t} \quad (5)$$

のように設定し、差周波数を変調周波数の 2 倍 ($2f_m$) とする。p 偏光と s 偏光の周波数は **Fig. 2** (b) のように変化する。

3. LD 直交 2 周波光源の構成

Fig. 3 に LD 直交 2 周波光源の構成を示す。ファンクションジェネレータ FG はランプアップ変調電圧を連続的に出力しており、LD 1 ドライバで電圧-電流変換され、単一縦モード発振のレーザーダイオード LD 1 (Sharp LT 021) にはランプアップ駆動電流が注入され発振する。また LD 1 内部のフォトダイオードで検出した発振光強度を駆動電流にフィードバックしているため発振出力は一定レベルに保たれている。しかし LD 1 の発振光は周波数と同様にその光強度も変調されるため、



LD1 : Laser diode 1 (Center of wavelength = 780nm)
LD2 : Laser diode 2 (Center of wavelength = 780nm)
FG : Function generator
ISO : Optical isolator
OBJ : Objective lens
NPBS1 : Non-polarizing beam splitter
PBS1, PBS2 : Polarizing beam splitter
PR : Rectangular prism

Fig. 3 Construction of a light source with orthogonally polarized two-frequency beam from laser diode.

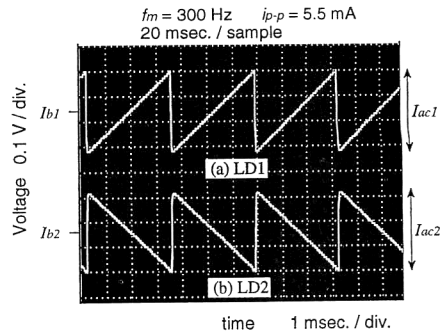


Fig. 4 Outgoing light intensity from LD with modulation.

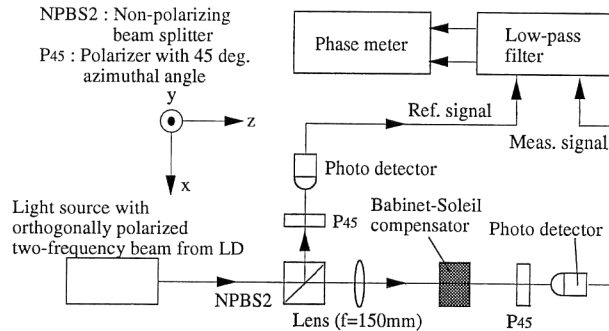


Fig. 5 Optical heterodyne interferometer for analysis and measurement of phase difference.

LD 1 の発振光強度は Fig. 4 (a) のように変調に伴い時間変化する。そこでマルチ縦モード発振のレーザーダイオード LD 2 (Sharp LT 023) を同調させ、LD 1 の発振光出力変化を補償する。そのため LD 1 のモニター信号は反転回路そして LD 2 ドライバによりランブダダウンの駆動電流に変えられ LD 2 に注入される。よって LD 2 の発振光強度は Fig. 4 (b) のように変化する。このとき LD 1, LD 2 の光強度変化の振幅が等しくなるよう設定されており、Fig. 4 (a), (b) の合成である全光強度は時間的に一定となっている。発振光はいずれも x, y 軸に対し 45 度傾いた直線偏光となっており NA 0.40 の対物レンズ OBJ で平行光とされ、無偏光ビームスプリッタ NPBS1 で合成される。光アイソレータ ISO は戻り光の影響による複合共振を起こさぬよう設けている。合成光は Fig. 1 で示した光学素子の作用により光強度に時間変化のない直交 2 周波光となり出射する。LD 2 の発振波長スペクトルは非常に広がっており、可干渉性 γ は最大で 0.47、またこのときのコヒーレント長は約 1 mm であり p 偏光成分と s 偏光成分の光路差 $D=30.4$ mm に比べて十分小さいので、本光源より得られる干渉信号を形成するのは LD 1 からの発振光のみとなっている。

4. 干渉信号の解析

解析する干渉計を Fig. 5 に示す。LD 直交 2 周波光源からの出射光は無偏光ビームスプリッタ NPBS2 により参照光と測定光に等分される。反射した参照光は直交偏光に対し 45 度方向に主軸をもつ偏光子 P45 で干渉したのちフォトディテクタで検出される。一方測定光はバビネソレイユ補償器により直交偏光間に位相差が生じた後、参照光と同様に干渉され検出される。バビネソレイユ補償器は任意の方向に任意の位相差を与えることのできる複屈折位相板である。補償器の複屈折主軸方位は直

交 2 周波光の偏光軸と一致している。参照信号と測定信号はそれぞれカットオフ周波数 600 Hz のローパスフィルタ LPF で高周波成分を除去されたのち、電気位相計にて位相比較される。

以下の解析においては、光学素子のもつ反射率、透過率は最終的に定まる複屈折量と検出位相差の関係にはほとんど影響を及ぼさないため省略する。まず便宜的に、

$$-\frac{1}{2f_m} \leq t \leq \frac{1}{2f_m} \quad (6)$$

のように時間域を制限し解析する。LD 直交 2 周波光源から出射した LD 1 発振光のジョーンズベクトル \mathbf{E} は式 (7) のように表すことができる。また LD 2 発振光はインコヒーレントであるため、光強度を求めてから考慮する。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) \exp i \left\{ \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \right\} \\ a(t - \Delta t) \exp i \left\{ \omega_0 (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \alpha (t - \Delta t)^2 \right\} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ω_0 は、Fig. 2 (a), (b) における $t=0$ のときの初期周波数、 $a(t)$ は時間変化する振幅である。次にバビネソレイユ補償器は任意の位相差 ($\phi_x - \phi_y$) を与えると考え、ジョーンズ行列で表すと次式のようなになる。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \exp i \phi_x & 0 \\ 0 & \exp i \phi_y \end{bmatrix} \quad (8)$$

さらに偏光子 P45 は次式のように表すことができる。

$$\mathbf{P}_{45} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

偏光子を透過した光波 \mathbf{E}' は、

$$\mathbf{E}' = \mathbf{P}_{45} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} E_x' \\ E_y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a(t) \exp i \left\{ \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 + \phi_x \right\} \\ + a(t - \Delta t) \exp i \left\{ \omega_0 (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \alpha (t - \Delta t)^2 + \phi_y \right\} \\ a(t) \exp i \left\{ \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 + \phi_x \right\} \\ + a(t - \Delta t) \exp i \left\{ \omega_0 (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \alpha (t - \Delta t)^2 + \phi_y \right\} \end{bmatrix} \quad (11)$$

のように求まる。この光波の光強度 I_{M1} は、 \mathbf{E}' ベクトル成分の2乗和によって次式のように定まる。

$$I_{M1} = \langle |\mathbf{E}'|^2 \rangle = |E_x'|^2 + |E_y'|^2 \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \left[a(t)^2 + a(t - \Delta t)^2 + 2a(t)a(t - \Delta t) \cos \left\{ \alpha \Delta t t + \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 + (\phi_x - \phi_y) \right\} \right] \quad (13)$$

式(13)において Δt は非常に小さいことから、

$$a(t) \approx a(t - \Delta t) \quad (14)$$

と近似できる。そして LD 2 の光強度を合成すると検出器で受光される測定光の全光強度 I_M は LD 1 発振光のバイアス強度 I_{b1} 、振幅強度 I_{ac1} 、LD 2 発振光のバイアス強度 I_{b2} を用いて次式のように表せる。

$$I_M = (I_{b1} + I_{b2}) + (I_{b1} + f_m I_{ac1} t) \cos \left\{ \alpha \Delta t t + \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 + (\phi_x - \phi_y) \right\} \quad (15)$$

参照光強度 I_R は同様にして次式のように算出される。

$$I_R = (I_{b1} + I_{b2}) + (I_{b1} + f_m I_{ac1} t) \cos \left\{ \alpha \Delta t t + \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 \right\} \quad (16)$$

以上のように補助レーザー LD 2 を用いることにより干渉光強度の直流成分を時間に対し一定にすることができる。これら干渉光強度の交流成分はビート周波数 aDt が変調周波数の2倍の $4\pi f_m t$ となっているので、それぞれ、

$$I_M' = (I_{b1} + f_m I_{ac1} t) \cos \left\{ 4\pi f_m t + \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 + (\phi_x - \phi_y) \right\} \quad (17)$$

$$I_R' = (I_{b1} + f_m I_{ac1} t) \cos \left\{ 4\pi f_m t + \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 \right\} \quad (18)$$

のように書きなおせる。そして時間領域を無限大まで考えると、カットオフ周波数 600 Hz の理想的なローパス

フィルタ透過後の測定および参照信号は、電気系の増幅率を ε とすると、

$$S_M(t)' = \varepsilon I_{b1} \cos(4\pi f_m t + \Phi_M) - \frac{\varepsilon I_{ac1}}{4\pi} \sin(4\pi f_m t - \Phi_M) - \frac{\varepsilon I_{ac1}}{\pi} \sin(2\pi f_m t + \Phi_M) + \frac{\varepsilon I_{ac1}}{3\pi} \sin(2\pi f_m t - \Phi_M) + \frac{\varepsilon I_{ac1}}{2\pi} \sin \Phi_M \quad (19)$$

$$S_R(t)' = \varepsilon I_{b1} \cos(4\pi f_m t + \Phi_R) - \frac{\varepsilon I_{ac1}}{4\pi} \sin(4\pi f_m t - \Phi_R) - \frac{\varepsilon I_{ac1}}{\pi} \sin(2\pi f_m t + \Phi_R) + \frac{\varepsilon I_{ac1}}{3\pi} \sin(4\pi f_m t - \Phi_R) + \frac{\varepsilon I_{ac1}}{2\pi} \sin \Phi_R \quad (20)$$

$$\Phi_M = \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 + (\phi_x - \phi_y) \quad (21)$$

$$\Phi_R = \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 \quad (22)$$

のように求められる (これらの式の導出は付録にて後述)。干渉信号にはバイアス項、周波数 $2f_m$ および f_m 成分の項が含まれている。さらには LPF は有限のカットオフ勾配をもつため、実際の測定信号にはさらに高次の周波数成分も存在する。しかしながら I_{b1} が I_{ac1} に比べて十分大きいときには他の周波数成分を無視することができる。次式のように書きなおすことができる。

$$S_M(t)' = \varepsilon I_{b1} \cos(4\pi f_m t + \Phi_M) \quad (23)$$

$$S_R(t)' = \varepsilon I_{b1} \cos(4\pi f_m t + \Phi_R) \quad (24)$$

これらの信号は、その位相により決まる時間間隔ごとに強度ゼロをクロスするので、位相計にて検出すると、位相差 $(\phi_x - \phi_y)$ だけを検出することができる。

5. 実験結果と考察

LD 直交2周波光源を駆動させる際の各設定値、測定値および諸量は以下のものである。

LD 1 波長 $\lambda_0 = 779.5$ nm

変調周波数 $f_m = 300$ Hz

LD 1 駆動バイアス電流 $i_b = 75$ mA

LD 1 駆動電流振幅 $i_{p-p} = 5.5$ mA

周波数変調係数 $k = -3.6$ GHz/mA

雰囲気温度 23°C (空調により制御)

$I_{ac1}/I_{b1} = 0.2$

5.1 光出力の交流ノイズについて

Fig. 6 に LD 直交2周波光源の光出力のもつ交流ノイズの観測結果を示す。出射光強度の検出には低ノイズの PIN フォトダイオードを用いた。観測波形より、変

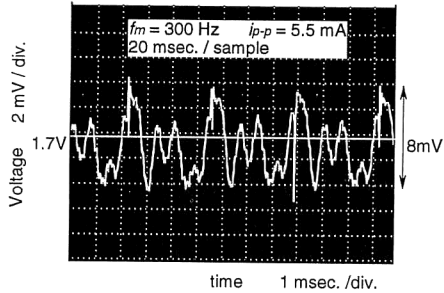


Fig. 6 Noise of inherent to outgoing light intensity.

調周波数に対する高調波ノイズ，変調周期ごとの瞬時ノイズが確認できるが，そのレベルは約 8mV である。全光強度は約 3mW でこのとき検出されたバイアス電圧は 1.7V であり，交流ノイズの S/N 比は -46.5 dB となっている。瞬時ノイズは高周波であるためローパスフィルタで除去されるが，高調波ノイズは周波数がビート周波数と近いいため完全な除去は困難である。つまり高調波ノイズは干渉信号中のひずみとなるため少なからず位相差測定時の誤差に影響すると考えられる。

5.2 干渉信号について

Fig. 7(a)には直接に得られる干渉信号波形を示す。干渉信号のバイアス成分は一定となっており，波形に時間的な傾きをもっていないことがわかる。しかし干渉縞のコントラスト成分の振幅は LD 1 の出力変化の影響を受け変調周期ごとに増加を繰り返している。またビート周波数を変調周波数の 2 倍となるよう駆動電流振幅を調節しているため，ランプ変調のリセット時においても位相をつなぐことができる。ローパスフィルタで高周波成分を除去すると Fig. 7(b)のような波形となり連続的な信号を得ることができ，通常の位相検出が可能となる。ところで干渉信号は干渉する 2 周波光の相対的な差（ビ

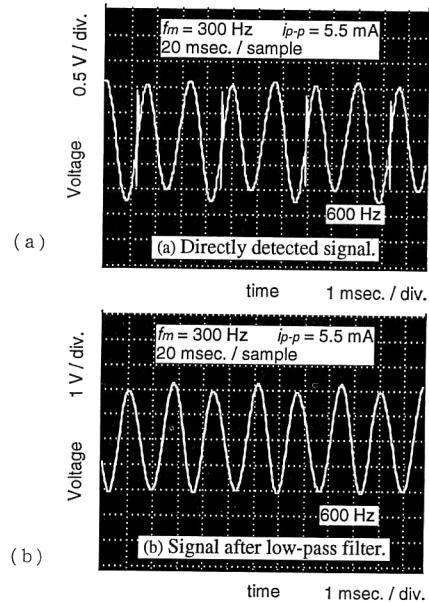


Fig. 7 Interference beat signal.

ート) 周波数をもつため，2 周波光の相関が大きければビート周波数の安定が期待できる。開発した光源ではランプ変調光に 30.4 mm の光路差を与え，生じる時間差はコヒーレント時間に比べ十分小さいので，2 周波光の状態はほぼ等しいと考えられる。よってビート周波数の安定性は加える変調の電気的な安定度，光路差の安定度と周波数変調係数の温度依存性によるものとなる。Fig. 8 にビート周波数の安定性に関する結果を示す。周波数の計測は周波数カウンタを用いて積分時間 10 秒で行い，約 30 分間の変動を記録したものである。なおここではローパスフィルタ透過後の信号を計測しており，また以後の測定結果も同様である。この計測による変動幅は 0.006 Hz であり，その安定度はビート周波数

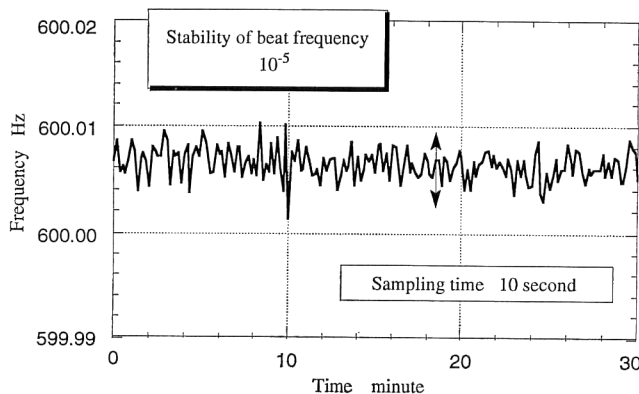


Fig. 8 Temporal variation beat frequency.

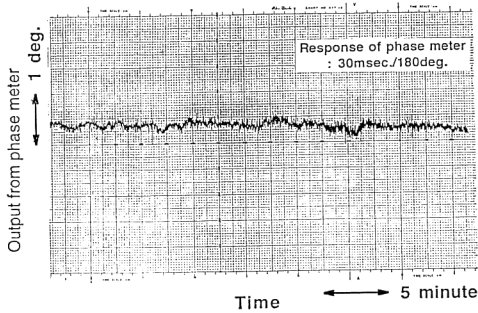


Fig. 9 Stability of phase difference.

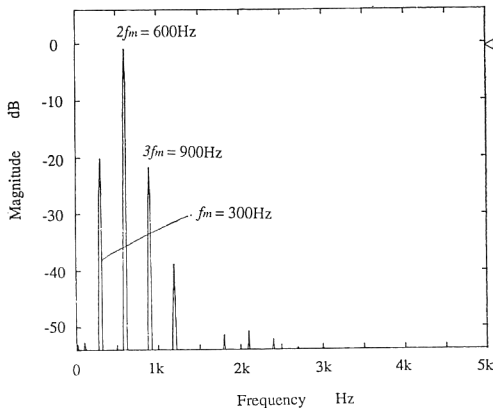


Fig. 10 Power spectrum of beat signal.

600 Hz に対し 10^{-5} となっている。つぎに参照信号と測定信号の相対的な位相差の安定性を検証した結果を Fig. 9 に示す。位相計のアナログ出力を 30 分間記録したところ、位相差の出力ドリフトは 0.3 deg 以下であり、この値はヘテロダイン計測へ応用した際の位相差検出感度を意味する。このようにビート周波数の時間的な変化の安定性は十分なレベルにある。Fig. 10 に干渉信号の周波数パワースペクトルの観測結果を示す。600 Hz はビート周波数成分であり、それに隣り合う 300 Hz および 900 Hz のスペクトル成分が約 -20 dB となっている。ここで式 (19) より周波数 f_m (300 Hz) のスペクトル成分は -23 dB と求められ Fig. 10 の測定結果とよく一致している。また 900 Hz 以上の成分は LPF でなおも取り除くことのできない成分であるが、カット勾配の大きなフィルタを用いることで低減できる。これら 600 Hz 以外の成分はその割合により位相測定誤差を与えらる。

5.3 位相差測定について

Fig. 5 の干渉計を用いて直交 2 周波光に既知の複屈折位相差を与え、位相計の出力を測定し測定精度を検証した。Fig. 11 に実験結果を示す。横軸はバビネソレイ

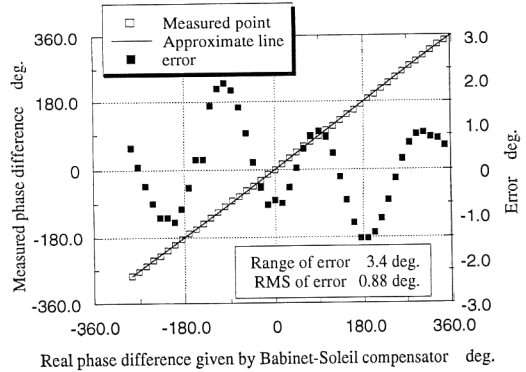


Fig. 11 Experimental result of phase difference measurement.

ュ補償器に与えたリターデーションであり、波長 779.5 nm における位相差で表している。縦軸は位相計で計測した測定値である。約 600 deg の範囲において線形的に測定できていることがわかる。実線は測定値の最小自乗法による近似直線である。このときの真値に対する近似直線のゲイン (傾き) 誤差は 0.5% 以下で良好な結果を得ている。また結果より位相測定には周期性をもつ誤差が生じているが、これは前項で示した干渉信号の基本周波数成分以外のひずみ成分が原因である。なぜなら電気位相計は入力信号が自身の平均値をクロスする瞬間にトリガがかかり位相を認識するため、入力信号がひずみをもつ場合はトリガのかかる時間にずれが生じ位相誤差となるからである。第 4 章で述べたとおり本手法により得られる干渉信号には被検位相を含む基本正弦波 (式 (19) の第 1 項) 以外の成分も含まれる。また Fig. 10 の結果で示したとおりローパスフィルタで除去しきれないビート周波数以上の周波数成分も存在する。それらはすべて基本正弦波に対するひずみであり、Fig. 11 のような誤差を生じさせると考えられる。これらのひずみを低減させるには、LD 1 発振光のバイアス強度に対する振幅強度の割合 (I_{ac1}/I_{b1}) を下げることが考えられる。しかしながら、現状のとおり (I_{ac1}/I_{b1}) の値が 0.2 の時であっても、誤差の幅は 3.4 deg、ばらつきは RMS 0.88 deg となっており、1/100 波長程度の測定精度を持つことが確認された。

6. おわりに

シングルモード LD とマルチモード LD を用いた LD 直交 2 周波光源を開発・試作し、この光源が光ヘテロダイン干渉計測に適用可能であることを実験的に明らかにした。LD 直交 2 周波光源を利用した位相差検出にお

る測定法では1/100波長程度(3.4 deg)の精度を得ることができ、さらにその1/10程度(0.3 deg)の感度をもつことが確認された。LD直交2周波光源は小型集積化が可能、LDの置き換えにより波長域が選択可能、解析周波数が可変であるなどの利点を持ち、光計測への実用化に際し非常に有用である。

文 献

- 1) Y. Ishii, J. Chen and K. Murata: "Digital phase-measuring interferometry with tunable laser diode," Opt. Lett., **12** (1987) 233-235.
- 2) 佐々木修己, 柳内敏男: "正弦波位相変調干渉法", 光学, **15** (1986) 25-30.
- 3) T. Yoshino, M. Nara, S. Mnatzakanian, B.S. Lee and T.C. Starnd: "Laser diode feedback interferometer for stabilization and displacement measurement," Appl. Opt., **26** (1987) 892-897.
- 4) 小林喬郎: "半導体レーザーによる干渉測長技術", 光学, **17** (1988) 279-284.
- 5) K. Tatsuno and Y. Tsunoda: "Diode laser direct modulation heterodyne interferometer," Appl. Opt., **26** (1987) 37-40.
- 6) 棚橋昌史, 大谷幸利, 吉澤 徹: "半導体レーザーを用いた直交2周波光源の作成と光ヘテロダイン干渉法", 光学連合シンポジウム旭川講演予稿集, 25 Aa 10 (1993) pp. 19-20.
- 7) 棚橋昌史, 大谷幸利, 吉澤 徹: "半導体レーザーを用いた直交2周波光の作成と光ヘテロダイン干渉法", 精密工学会秋季講演会論文集, G 64 (1993) pp. 897-898.
- 8) R. Onodera and Y. Ishii: "Two-wavelength laser diode interferometry with electronic calibration techniques," Proc. SPIE, **1720** (1992) 458-463.

付 録

時間領域を無限大に拡張すると、測定干渉信号の交流成分 $S_M(t)$ はレクタンブル関数 $\Pi(t)$ 、コム関数 $\text{comb}(t)$ を用いて次式のように表せる。

$$S_M(t) = f_m I_M' \Pi(f_m t) * \text{comb}(f_m t) \quad (25)$$

ただし *印はコンボリューション積分の演算記号である。次に、理想的なカットオフ勾配をもち、カットオフ

周波数が $2f_m$ の LPF 応答系の伝達関数は、周波数領域において幅 $4f_m$ のレクタンブル関数で表せるので、濾波後の信号 $S_M(t)'$ は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} S_M(t)' &= \varepsilon S_M(t) * F^{-1} \left[\Pi \left(\frac{f}{2f_m} \right) \right] \quad (26) \\ &= \varepsilon f_m I_M' \Pi(f_m t) * \text{comb}(f_m t) * F^{-1} \left[\Pi \left(\frac{f}{2f_m} \right) \right] \quad (27) \end{aligned}$$

ただし ε は電気系の増幅率、 F^{-1} はフーリエ逆変換を表す。式(26)中のコム関数と LPF 伝達関数とのコンボリューションは、周波数領域にて次式のように五つのデルタ関数 $\delta(f)$ で与えられる。

$$F \left[\text{comb}(f_m t) * F^{-1} \left[\Pi \left(\frac{f}{2f_m} \right) \right] \right] = \sum_{n=-2}^2 \delta(f - n f_m) \quad (28)$$

よって $S_M(t)'$ は周波数領域にて次式のように算出される。

$$\begin{aligned} F[S_M(t)'] &= F[\varepsilon f_m I_M' \Pi(f_m t)] * \sum_{n=-2}^2 \delta(f - n f_m) \quad (29) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left(I_{b1} \exp(-i\Phi_M) + \frac{I_{ac1}}{i4\pi} \exp(i\Phi_M) \right) \cdot \delta(f + 2f_m) \\ &\quad + \frac{\varepsilon I_{ac1}}{i2\pi} \left(\exp(-i\Phi_M) - \frac{1}{3} \exp(i\Phi_M) \right) \cdot \delta(f + f_m) \\ &\quad + \frac{\varepsilon I_{ac1}}{i4\pi} \left(-\exp(-i\Phi_M) + \exp(i\Phi_M) \right) \cdot \delta(f) \\ &\quad + \frac{\varepsilon I_{ac1}}{i2\pi} \left(\frac{1}{3} \exp(-i\Phi_M) - \exp(i\Phi_M) \right) \cdot \delta(f - f_m) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \left(I_{b1} \exp(i\Phi_M) - \frac{I_{ac1}}{i4\pi} \exp(-i\Phi_M) \right) \cdot \delta(f - 2f_m) \quad (30) \end{aligned}$$

そして、式(30)をフーリエ逆変換することにより、時間的な信号として式(19)で示した $S_M(t)'$ を得ることができる。