

研究

計算機ホログラムの再生像補間法

吉川 宣一・伊藤 雅英・谷田貝豊彦

筑波大学物理工学系 〒305 つくば市天王台 1-1-1

(1994年12月1日受付, 1995年4月14日受理)

Interpolation Approach to Computer-Generated Hologram

Nobukazu YOSHIKAWA, Masahide ITOH and Toyohiko YATABE

Institute of Applied Physics, University of Tsukuba, 1-1-1, Tennoudai, Tsukuba 305

(Received December 1, 1994; Accepted April 14, 1995)

We describe a new interpolation method of image points reconstructed by a Fourier transform computer-generated hologram, so that a sufficient large hologram can be synthesized by small holograms. We have made a mosaic hologram which consists of $K \times K$ sub-holograms with $N \times N$ sampling points multiplied by an appropriate weights. It is shown that the mosaic hologram can reconstruct an image with $NK \times NK$ resolution. The main advantage of the presented algorithm is that a sufficiently large size hologram of $NK \times NK$ sample points is synthesized by $K \times K$ sub-holograms which are successively calculated from the data $N \times N$ sample points and plotted.

1. はじめに

計算機ホログラム (CGH: computer generated hologram) は光情報処理やディスプレイのための重要なデバイスとして発展してきた¹⁻⁵⁾。ホログラムの設計における自由度の高さは CGH の主な利点である。しかし、莫大な計算量と描画時間のため、広範囲の利用は制限されていた。 $N \times N$ の解像点をもつ像を再生するためには、CGH には $N \times N$ の標本セルを必要とする。再生される物体が非常に多くの解像点をもつ場合、ホログラムはこの数と同じ標本セルをもたねばならない。これは長い計算時間や大量の計算機メモリが必要であることを示す。もし物体各点の振幅が独立でないとすると、再生像点に対して補間法を適用することにより必要なメモリを減らすことができる⁶⁻⁸⁾。

この論文ではフーリエ変換型 CGH の再生像点補間法について述べ、またその光学実験による確認を行った。

2. 離散フーリエ変換による再生像の補間

この方法の記述の前に、離散フーリエ変換 (DFT: discrete Fourier transform) の性質について考える。

簡単のため、ここでの計算は一次元の場合を用いる。二次元への拡張は容易である。像空間で N 個の標本点を $f(p\Delta)$, $p=0, 1, \dots, N-1$ とすると、その DFT は、

$$F(p\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Omega) \exp(i np\Omega\Delta) \quad (1)$$

である。ここで、 Δ はサンプリング周期を表す。また、 $\Omega = 2\pi/(N\Delta)$ である。フーリエ変換型 CGH の場合、 $F(n\Omega)$ は像 $f(p\Delta)$ を再生するホログラムと考えることができる。その逆フーリエ変換は

$$F(n\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} f(p\Delta) \exp(-i np\Omega\Delta) \quad (2)$$

である。DFTにおいては N 個の標本点は N 個のフーリエ点像に写像される。すなわち、 $F(n\Omega)$, $n=0, 1, \dots, N-1$ となる。

もし、像空間のサンプリング周期 Δ をサブ周期 K で分割するならば、新しい周期は $\delta = \Delta/K$ で与えられる。このとき項 $f(p\Delta)$ は新しい標本化レートで K 標本の間隔でのみ望ましい値を与えることになる。本手法では N 個の標本点を $(K-1)$ 回繰り返し配置し、これに補間のための重み要素 $\rho(k\delta)$, $k=0, 1, \dots, K-1$ を掛け、残りの標本点を補間することを考える。このとき式(2)より、

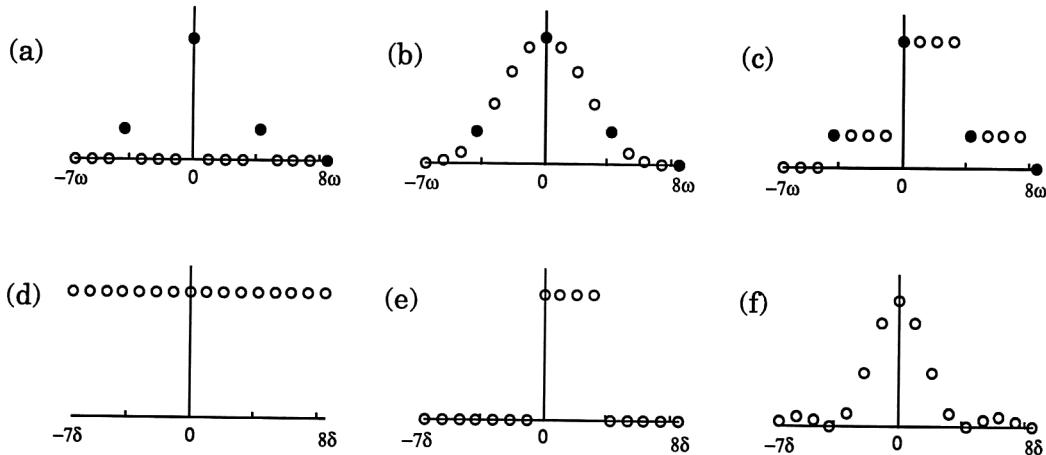


Fig. 1 Three types of interpolation and their weights in the Fourier domain (●: original sampling points, ○: interpolated points). (a) Delta function type, (b) sinc function type, (c) constant type interpolation, and (d)–(f) their weighting factors.

$$\begin{aligned} F'(r\Omega) &= \frac{1}{NK} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} f(p\Delta) \rho(k\delta) \exp(-i(p\Delta + k\delta)r\Omega) \\ &= F([r]_N\Omega) \cdot W(r) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで、 $r=0, 1, \dots, NK-1$, $[r]_N = r$ modulo N , $W(r)$ はフーリエ領域の重み要素である。フーリエ領域の重み要素は、

$$W(r) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \rho(k\delta) \exp(-i k r \delta \Omega) \quad (4)$$

で与えられる。式(3)より、 $f(p\Delta)$ を K 倍補間することによって得られる項の DFT は、 $F(n\Omega)$ の周期拡張した項 $F([n]_N\Omega)$ と重み要素 $W(r)$ との積であることがわかる。ここで補間重み $\rho(k\delta)$ として次の 3 つの場合を考える。

タイプ A：デルタ関数補間

タイプ B：sinc 関数補間

タイプ C：一定補間

タイプ A のデルタ関数補間は、補間前の標本点のみを表示するものであるが、便宜的にここではデルタ関数による補間と呼び、他の補間関数と総合的に取り扱うことにする。これらの場合、フーリエ領域の重み要素は、

$$\text{タイプ A: } W(r) = 1 \quad (5)$$

$$\text{タイプ B: } W(r) = 1 : 0 \leq r \leq N-1 \quad (6)$$

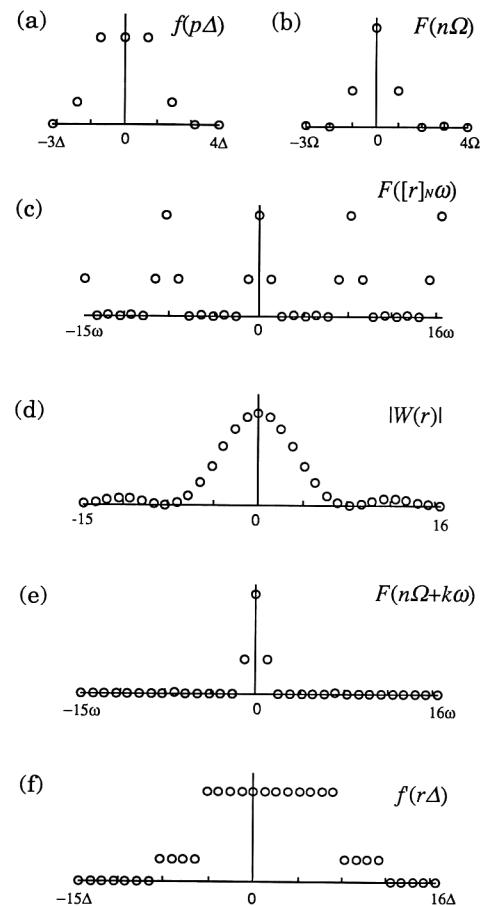


Fig. 2 Interpolation procedure of type C in one-dimensional case ($N=8$, $K=4$). (a) Original image sequence $f(p\Delta)$, $0 \leq p \leq 8$, (b) its DFT $F(n\Omega)$, (c) periodic extension of (b), (d) weighting factor of type C, $|W(r)|$, (e) hologram sequence $F(n\Omega + k\omega)$, and (f) image sequence $f'(r\Delta)$ which is given by the inverse DFT of (e).

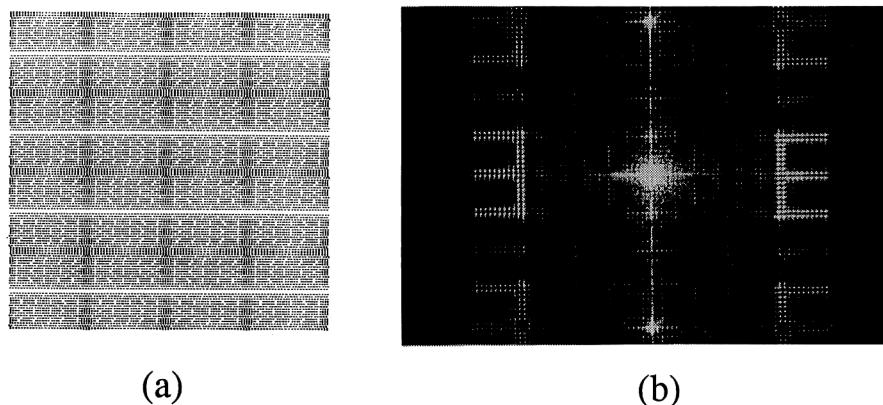


Fig. 3 Image interpolation of type A. (a) Hologram given by arranging 4×4 sub-holograms of 32×32 sampling points, and (b) its reconstructed image.

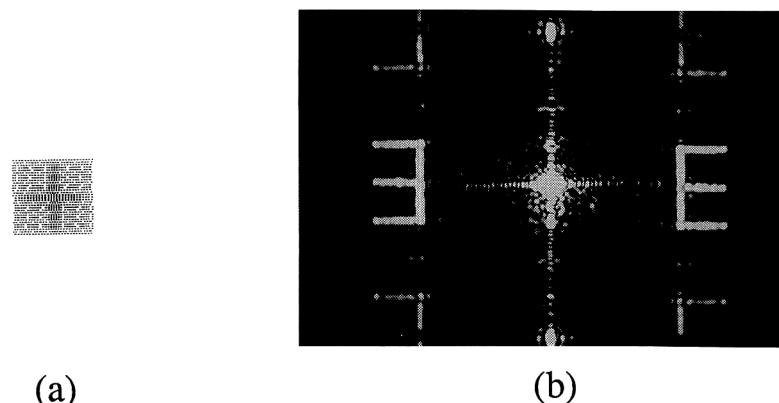


Fig. 4 Image interpolation of type B. (a) Hologram given by superposition of the weighting factor of Eq. (6) on the mosaic hologram of Fig. 3(a), and (b) its reconstructed image.

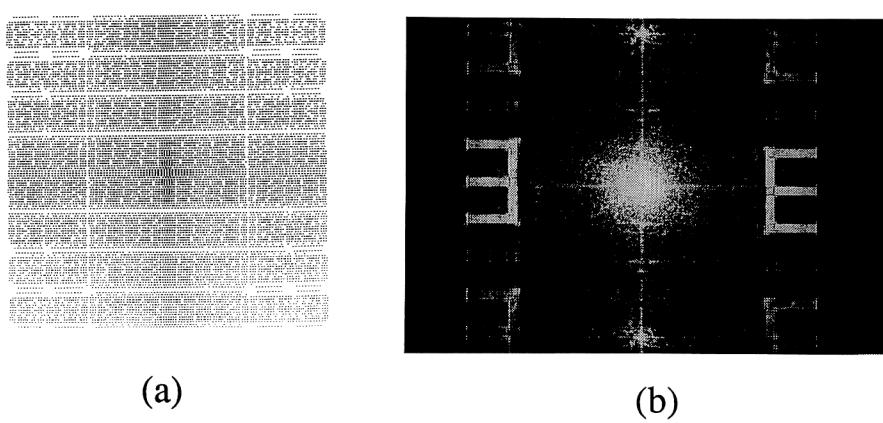


Fig. 5 Image interpolation of type C. (a) Hologram given by superposition of the weighting factor of Eq. (7) on the mosaic hologram of Fig. 3(a), and (b) its reconstructed image.

$$=0 : N \leq r \leq NK - 1$$

$$\text{タイプC: } W(r) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1 - \exp(2\pi i r/N)}{1 - \exp(2\pi i r/NK)} \quad (7)$$

である。一例として $K=4$ の場合、補間の種類とそれらの重み要素を Fig. 1 に示す。Fig. 2 にタイプ C の一定補間の場合の数値例 ($N=8$, $K=4$) を示す。像の項 $f(pA)$ を Fig. 2(a) のように定義すると、その DFT は Fig. 2(b), DFT 項の周期拡張は Fig. 2(c) である。式 (7) によって記述される重み要素と像補間のためのホログラム項は Fig. 2(d), (e) に示す。Fig. 2(e) のフーリエ変換は Fig. 2(f) の補間された像を与える。

3. ホログラムの合成手順と実験的確認

$N \times N$ の標本点のホログラムを考える。第 1 段階として、そのフーリエ変換ホログラムを描画する。ステップ・アンド・リピート・カメラで $N \times N$ の標本点をもつフーリエ変換ホログラムを繰り返し描画し $K \times K$ 個のモザイク型ホログラムをつくる。一方、 $W(r)$ の伝達関数をもつ複素フィルターを、例えば CGH の手法を用いて製作する。モザイクホログラムに重み複素フィルターを重ね合わせて再生すると、補間前の $N \times N$ の標本点からなる像が $NK \times NK$ の解像点をもつ像として得ることができる。

また、適切な重み項 $W(r)$ をあらかじめ計算機中で掛け合わせることにより、重み項を含む $N \times N$ の標本点を計算して $K \times K$ 個のモザイク型ホログラムを合成する方法もある。

実験においては 32×32 の標本点の一般の CGH と 4×4 個のサブホログラムを配置することによって得られる 128×128 標本点のモザイク型ホログラムを合成した。Fig. 3, 4, 5 に実験結果を示す。 32×32 の標本点の文字「E」をテスト物体とする。すべてのホログラムは Lohmann 型ホログラムでつくられている。Fig. 3(a) はタイプ A の CGH である。 32×32 の標本点のサブホログラムが 4×4 個で配置されている。重みは一定である。再生点は Fig. 3(b) に示されるように再生される。タイプ B の場合、重み要素を含むホログラムは Fig. 4(a) に示す。sinc 関数で補間したホログラムは、式 (6) より、

単独のサブホログラムと等価と考えることができる。再生点は Fig. 4(b) に示すように十分補間されていないことがわかる。Fig. 5(a) はタイプ C のホログラム、Fig. 5(b) はその再生像を示す。Fig. 5(b) の再生像は完全に補間され、その境界の明瞭さは 3 つのタイプの再生像の中で最も良いことがわかる。

4. 結 論

この論文では標本点が独立でないフーリエ変換型 CGH の計算のため、補間法により標本点を減らし、合成計算において必要なメモリや計算時間を削減する方法について述べた。補間法を適用したこの方法により、 $NK \times NK$ の解像点をもつ十分大きなホログラムが、 $N \times N$ の標本点をもつ要素ホログラムを $K \times K$ 個に並べてモザイクホログラムを作り、これに重み要素をのせることにより合成することができる。これは $NK \times NK$ の解像点を再生する CGH の合成において、コンピュータの必要なメモリ量が $N \times N$ で処理できることを意味する。

文 献

- 1) B. R. Brown and A. W. Lohmann: "Complex spatial filtering with binary masks," *Appl. Opt.*, **5** (1966) 967-969.
- 2) A. W. Lohmann and D. P. Paris: "Binary Fraunhofer holograms generated by computer," *Appl. Opt.*, **6** (1967) 1739-1748.
- 3) W. H. Lee: "Computer-generated holograms: Techniques and applications," *Progress in Optics*, Vol. XVI, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1978) pp. 121-232.
- 4) A. W. Lohmann and D. P. Paris: "Computer-generated spatial filters for coherent optical data processing," *Appl. Opt.*, **7** (1968) 651-655.
- 5) T. Yatagai: "Stereoscopic approach to 3-D display using computer-generated holograms," *Appl. Opt.*, **15** (1976) 2722-2729.
- 6) T. Yatagai: "Interpolation methods of computer-generated filters for large object formats," *Opt. Commun.*, **15** (1977) 347-351.
- 7) H. Bartlet, W. J. Dallas and A. W. Lohmann: "Computer-generated spatial filters for large object formats," *Opt. Commun.*, **20** (1977) 50-55.
- 8) W. K. Pratt: *Digital Image Processing* (John Wiley & Sons, New York, 1978) Chap. 4, p. 113.