

研 究**計算機ホログラムからの3次元像再生シミュレーション**

田中 賢一・下村 輝夫

九州工業大学工学部電気工学科 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

(1995年6月16日受付, 1995年9月20日受理)

**Image Reconstruction from Computer-Generated Holograms of
Three Dimensional Object in Computer Simulation**

Ken'ichi TANAKA and Teruo SHIMOMURA

Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, 1-1, Sensui, Tobata-ku, Kitakyushu 804

(Received June 16, 1995; Accepted September 20, 1995)

Simulation for three dimensional image reconstruction from computer-generated holograms of three dimensional objects is demonstrated. Simulation is performed by calculation using discrete Fourier transform. Reconstructed images in computer simulation coincide with those in optical experiment. This simulation is useful for a study of the improvement of reconstructed images with computer-generated holograms of three dimensional objects. Comparison of binary encoding methods, namely Brown-Lohmann's and Onoe-Kaneko's methods for computer-generated holograms of three dimensional objects, is shown.

1. ま え が き

計算機ホログラム¹⁻⁶⁾は仮想物体画像,あるいは2光束干渉によるホログラムの記録が困難な物体画像のホログラフィックな再生をはじめとして種々の目的で合成される。計算機ホログラムの合成は,多くの場合,入力物体をフーリエ変換し,複素振幅を量子化したものをホログラムパターンとして白黒2値表示したものを,写真縮小することによっている。これまでの計算機ホログラムに関する研究については,そのほとんどが2次元物体を再生する計算機ホログラムを対象としており,3次元物体を再生する計算機ホログラムを対象とした研究は非常に少ない。その理由は,例えば計算機ホログラムの再生像改善を行うとすれば計算機シミュレーションによる再生像の検討が不可欠で,2次元の場合は正確な像再生シミュレーションの手法が確立している^{2,3)}が,3次元の場合はまだ正確な像再生シミュレーションの手法が確立していないことによる。したがって,3次元物体を再生する計算機ホログラムの再生像改善について検討を行うためには,正確な像再生シミュレーションを実現するこ

とが必要である。

ところで,計算機ホログラムの2次元像再生シミュレーションはホログラムパターンをスキャニングし2次元離散フーリエ変換すればよいとされている^{2,3)}。この手法によって得られた再生像はフーリエ変換レンズの焦点面あるいはフラウンホーファー回折となる面に現れるものである。ところが,計算機ホログラムからの3次元再生像はフーリエ変換レンズの焦点から外れた面,すなわちフレネル回折となる面にも再生物体が現れるため,これらの面における像再生シミュレーションが可能となればよいことになる。

本論文では,3次元計算機ホログラムの数値的像再生シミュレーションについて検討する。まず,回折計算により,レンズの焦点面以外での得られる像について解析を行う。次に,3次元計算機ホログラムを合成し,再生像の計算機シミュレーションならびに光学実験を行い,計算機シミュレーションの妥当性について検討する。ただし,本論文で扱う3次元計算機ホログラムは断層型計算機ホログラム^{1,4)}とする。

2. 数値的像再生理論

2.1 3次元計算機ホログラムの合成

本項では、断層タイプの3次元計算機ホログラムの合成法について述べる。

3次元計算機ホログラムに記録される複素振幅 $H(u, v)$ は入力物体の複素振幅 $g(x, y, z)$ が3次元的に分布していると考えると、次式で表される。

$$H(u, v) = \iiint g(x, y, z) \exp\left\{\frac{\pi(f-z)}{j\lambda fz}(u^2+v^2)\right\} \cdot \exp\left\{\frac{2\pi}{j\lambda z}(xu+yv)\right\} dx dy dz \quad (1)$$

ただし、 j は虚数単位、 f はレンズの焦点距離である。実際の計算においては、例えば、次式に示すように z 方向に垂直な多数の層 ($i=0,1,2,\dots$) の合成によって計算される¹⁾。

$$H(u, v) = \sum_i \exp\left\{\frac{\pi(f-z_i)}{j\lambda fz_i}(u^2+v^2)\right\} G(u, v, z_i) \quad (2)$$

ただし、 $G(u, v, z_i)$ は $g(x, y, z_i)$ の2次元フーリエ変換である。実際の計算機ホログラムはこの複素振幅 $H(u, v)$ を量子化して表示したものである。

2.2 3次元計算機ホログラムの再生像

本項では、計算機ホログラムの再生像がどのように結像されるかを示す。

計算機ホログラムの再生光学系を **Fig. 1** に示す。光学系においてレンズの焦点距離を f 、計算機ホログラムからレンズまでの距離を d_1 、レンズから再生像を得る位置までの距離を d_2 とする。

ビームエキスパンダーで拡げられたレーザー光で3次元計算機ホログラムを照射する。このレーザー光がホログラムを通過後、レンズの直前に到達する波面の複素振幅分布 $u^-(u, v)$ は、計算機ホログラムからレンズまでの距離を d_1 とおくと、フレネル回折によって次式で示すたたみ込み積分 (convolution integral) で与えられる。

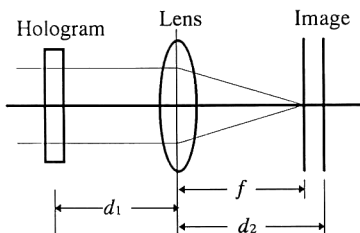


Fig. 1 Optical system.

$$u^-(u, v) = H(u, v) * \frac{1}{j\lambda d_1} \exp\left\{\frac{\pi}{j\lambda d_1}(u^2+v^2)\right\} \quad (3)$$

式(3)によって計算された $u^-(u, v)$ がレンズを通過する際、次式に示すレンズの透過関数 $t(u, v)$ が乗じられる。

$$t(u, v) = \exp\left\{\frac{\pi}{j\lambda f}(u^2+v^2)\right\} p(u, v) \quad (4)$$

ただし、 $p(u, v)$ はレンズの瞳関数でレンズの口径は十分広いものとする、 $p(x, y) = 1$ とすることができる。レンズを通過し、レンズからの距離 d_2 における複素振幅分布 $r(x, y)$ はフレネル回折に従って次式で示される。

$$r(x, y) = \{u^-(x, y)t(x, y)\} * \frac{1}{j\lambda d_2} \exp\left\{\frac{\pi}{j\lambda d_2}(x^2+y^2)\right\} \\ = \frac{1}{j\lambda d_2} \exp\left\{\frac{\pi(f-d_2)}{j\lambda fd_2}(u^2+v^2)\right\} \\ \cdot \iint u^-(u, v) \exp\left\{\frac{\pi(f-d_2)}{j\lambda fd_2}(u^2+v^2)\right\} \\ \cdot \exp\left\{\frac{2\pi}{j\lambda d_2}(xu+yv)\right\} dudv \quad (5)$$

式(5)に式(3)、(4)を代入すると、計算機ホログラムに記録された複素振幅 $H(u, v)$ と再生像の複素振幅 $r(x, y)$ との関係が次式で表される。

$$r(x, y) = \frac{w}{j\lambda d_1 d_2} \exp\left\{j\frac{2\pi}{\lambda}(x^2+y^2)\right\} \\ \cdot \exp\left\{\frac{\pi(d_2-w)}{j\lambda d_2^2}(x^2+y^2)\right\} \\ \cdot \iint H(u, v) \exp\left\{\frac{\pi(d_1-w)}{j\lambda d_1^2}(u^2+v^2)\right\} \\ \cdot \exp\left\{\frac{2\pi w}{j\lambda d_1 d_2}(xu+yv)\right\} dudv \quad (6)$$

ただし、 w は次式で表される。

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} \quad (7)$$

式(6)により数値計算を行う場合には、次式に示すように、離散フーリエ変換を用いた計算が可能となる。

$$r(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} H(k, l) \\ \cdot \exp\left\{\frac{\pi(d_1-w)L^2}{j\lambda d_1^2 N^2}(k^2+l^2)\right\} \\ \cdot \exp\left\{\frac{2\pi}{jN}(km+ln)\right\} \quad (8)$$

ただし、 N は標本点数、 L はホログラムパターンの大きさ、 k, l, m, n は0から $N-1$ の値をとる整数であり、式(6)における定数項は再生像の振幅分布に寄与しないため省略している。

3. 計算機シミュレーションと光学再生実験

本節では、3次元計算機ホログラムの再生像を数値シミュレーションにより行い、光学再生像と比較を行う。

用いた計算機ホログラムは、Brown-Lohmannの方法¹⁾によるもので、1つのサンプル点を 4×4 画素で表示したものである。入力物体は、 128×128 画素の領域に対して、焦点面に文字物体“九州”を、焦点面より30 mm離れた位置に文字物体“工大”をそれぞれが互いに重ならないように配置している。また、入力物体に付加する位相はランダム位相とした。

計算機シミュレーションによる再生像はホログラムパターンをスキヤニングし、式(8)に対応した計算を行い、再生像の強度を256階調でモニターに表示したものを写真撮影することにより得た。なお、レンズの焦点距離 f は300 mm、記録されたホログラムパターンの大きさ L は10 mmとした。

光学再生像は、ビームエキスパンダーによって広げられたHe-Neレーザー($\lambda=632.8$ nm)をホログラムに照射し、フーリエ変換レンズを通過した後結像したものをCCD (charge coupled device) カメラで撮像し、ビ

デオプリンターで印画することにより得た。なお、光学再生実験に用いたホログラムは、ホログラムパターンをグラフィックディスプレイに表示した後、そのハードコピーを白黒写真フィルム(富士写真フィルム製ミニコピーフィルム)に縮写することによって作製した。

まず、ホログラムからレンズまでの距離 d_1 をレンズの焦点距離 f と等しくした場合の再生像をFig. 2に示す。レンズの後側焦点面においては文字物体“九州”が焦点に関して対称に再生されていることがわかる。焦点面から30 mm前側に離れた面においては文字物体“工大”が1箇所だけ再生されている。焦点面から30 mm後側に離れた面においては文字物体“工大”が1箇所だけ焦点に関して空間的対称な位置に再生されていることがわかる。このことから、再生物体は焦点に関して空間的対称に再生されるという3次元計算機ホログラム再生像の性質²⁾が計算機シミュレーションでも確認できることがわかる。したがって、計算機シミュレーションによる再生像は光学再生像とよく一致しているといえる。

次に、ホログラムからレンズまでの距離が焦点距離と等しくない場合($d_2=0.4f$)の再生像をFig. 3に示す。

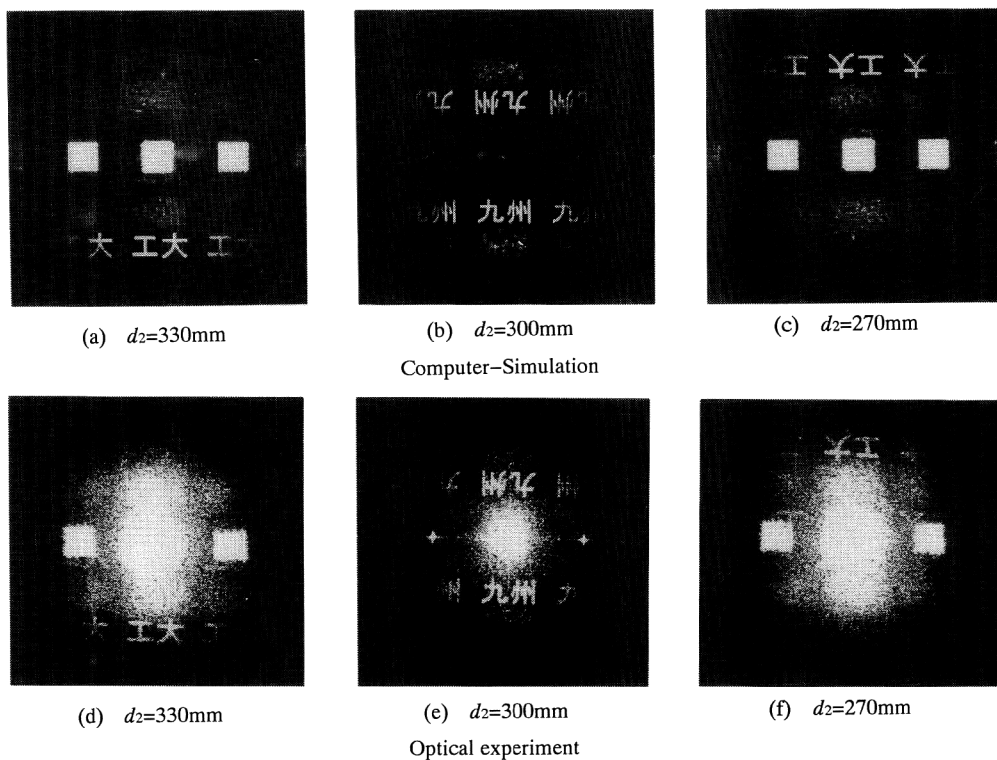


Fig. 2 Reconstructed images ($d_1=f$).

この場合も、焦点面に文字物体“九州”が焦点に関して対称に再生されており、焦点から 30 mm 離れた面においては文字物体“工大”が焦点に関して空間的対称に再生されている。光学実験においては再生物体の大きさが焦点面以外で変化することが知られている⁴⁾が、計算機シミュレーションではこの現象は認められない。その理由は次のことによる。すなわち、計算機シミュレーションを行う際に離散フーリエ変換を用いた計算をしているが、標本点間隔が d_1 ならびに d_2 によって変動するにもかかわらず、表示の際モニター上での標本点の間隔が変動していないためである。一般的に、レンズから距離 d_2 の面における再生物体の寸法と焦点面における再生物体の寸法との比とは、次式で与えられる⁴⁾。

$$\xi = \frac{d_2}{f} \left(1 - \frac{d_1}{f} \right) + \frac{d_1}{f} \quad (9)$$

ただし、 d_1 はホログラムからレンズまでの距離である。したがって、数値的再生像を表示する際にはモニター上の隣り合う標本点の間隔を式(9)に応じて伸縮させればよい。この場合も、計算機シミュレーションによる再生像は光学再生像と再生物体の大きさの変化を除いてよく一致していることがわかる。

さらに、この像再生シミュレーションを用いた再生像の検討の一例として、ホログラムパターンの表示方法に対する再生像の評価について触れておく。すなわち、Brown-Lohmannの方法¹⁾と、尾上-金子の方法⁴⁾との2種類について、3次元計算機ホログラムにおける画質の評価を行う。ただし、尾上-金子の方法については文献5)に示されているA-IIIタイプによるものとする⁴⁾(付録参照)。尾上-金子の方法による再生像を Fig. 4 に示す。ただし、再生に関する条件は Fig. 2 に示したものと同一としている。Fig. 2, Fig. 4 より、尾上-金子の方法による再生像は、Brown-Lohmannの方法を用いた場合と比較して、再生物体がはっきりと再生されていることがわかる。これらの再生像に関して、定量的評価を行う。定量的評価に用いる評価量は、再生物体が存在する1次の回折光の成分の領域についての平均2乗誤差MSEとする。この平均2乗誤差MSEは次式で表される⁶⁾。

$$\text{MSE} = \left\langle \left| \frac{|g| - \langle |g| \rangle}{\sigma_{|g|}} - \frac{|r| - \langle |r| \rangle}{\sigma_{|r|}} \right|^2 \right\rangle \quad (10)$$

ただし、 $|g|$, $|r|$ は入力像、再生像の振幅の絶対値、 $\langle |g| \rangle$, $\langle |r| \rangle$ は入力像、再生像の平均振幅、 $\sigma_{|g|}$, $\sigma_{|r|}$

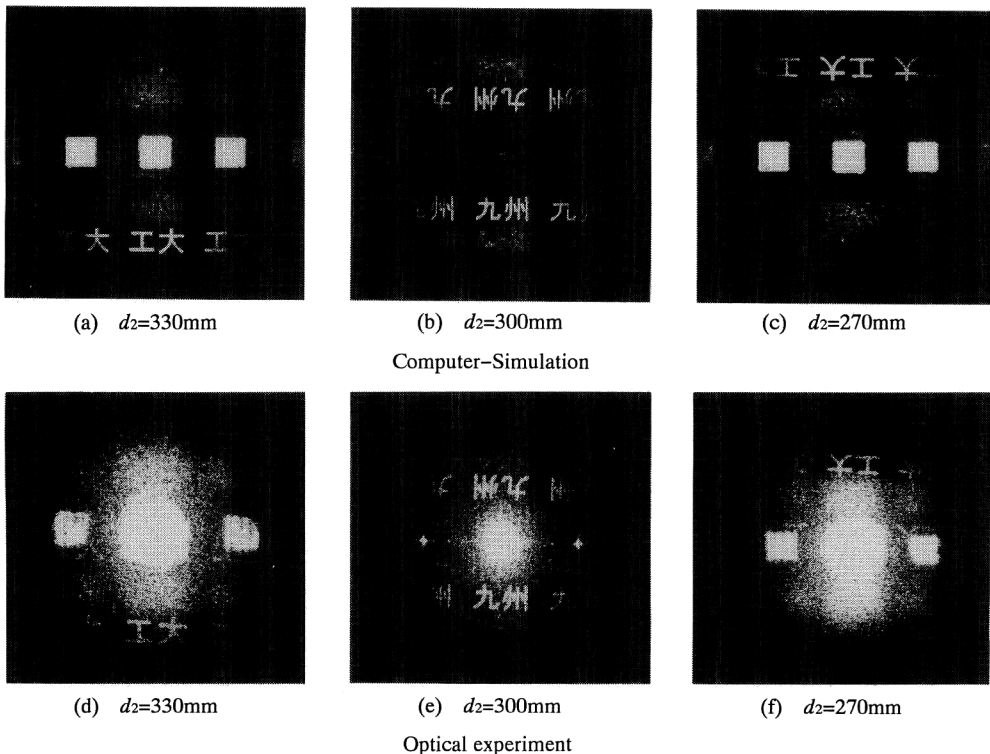


Fig. 3 Reconstructed images ($d_1=0.4f$).

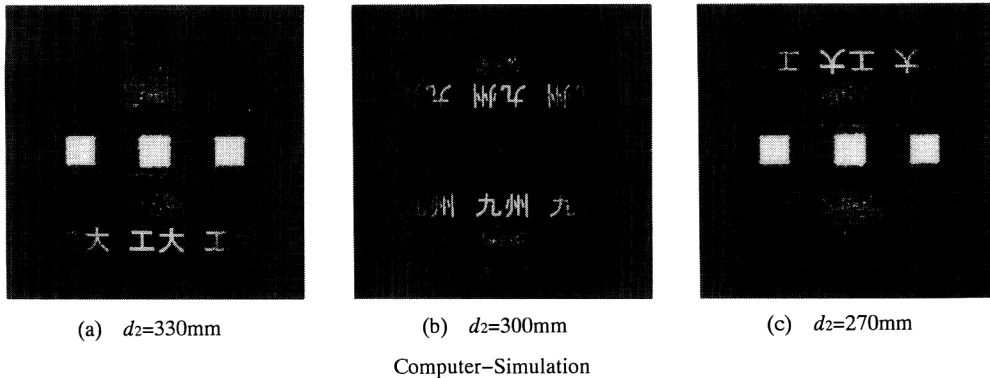


Fig. 4 Reconstructed images (Onoe-Kaneko's method).

Table 1 Comparison of reconstructed images for encoding method (MSE).

Encoding method	“九州”	“工大”
Brown-Lohmann's method	1.00	1.00
Onoe-Kaneko's method	0.82	0.90

は入力像，再生像の振幅の標準偏差である。Table 1にそれぞれの方法による再生像の平均2乗誤差を示す。表中の数値はBrown-Lohmannの方法による再生像の数値で規格化している。この結果より，尾上-金子の方法は，Brown-Lohmannの方法と比較して，再生像の平均2乗誤差MSEが小さくなる方式であることがわかる。2次元計算機プログラムに関して，尾上-金子の方法^{*1}はBrown-Lohmannの方法と比較して優れた再生像を与える方式である⁵⁾という知見があるが，この知見を3次元計算機プログラムにも拡張できることをTable 1の結果は示唆していると考えられることができる。

4. む す び

本論文では，3次元計算機プログラムからの像再生を計算機シミュレーションにより行い，光学再生像との比較検討をした。

まず，計算機プログラムからの再生像を回折計算により解析し，計算機シミュレーションは離散フーリエ変換を用いた計算によって可能となることを示した。

*1 文献5) においてはA-III, B-II, Cタイプの3種類のことを指しているが，本論文ではこのなかのA-IIIタイプのことをいう。

次に，Brown-Lohmann型3次元計算機プログラムを合成し，計算機シミュレーションと光学実験とを行った。計算機シミュレーションによる再生像は光学再生像とよく一致することが明らかとなった。

さらに，像再生シミュレーションを用いた再生像の検討の一例として，計算機プログラムの表示方式についての比較を行った。比較した表示方式はBrown-Lohmannの方法と尾上-金子の方法との2つである。その結果，尾上-金子の方法はBrown-Lohmannの方法と比較して優れた再生像を与え，2次元計算機プログラムの場合と同様な傾向が現れることが明らかとなった。

これらのことから，3次元計算機プログラムの像再生シミュレーションが実行できることが明らかとなった。この像再生シミュレーションを利用した，さらなる再生像の改善については今後の課題としたい。

文 献

- 1) B. R. Brown and A. W. Lohmann: "Computer generated binary holograms," IBM J. Res. Dev., **13** (1969) 160-168.
- 2) 広瀬不二夫，加藤一夫，服部 肇: "計算機プログラムの再生像シミュレーションと最低量子化条件"، 信学論(C), **J62-C** (1979) 558-565.
- 3) 田中賢一，下村輝夫: "誤差拡散法による2値に位相量子化した計算機プログラムの再生像の改善"، 信学論(C-I), **J77-C-I** (1994) 101-112.
- 4) 尾上守夫，金子正秀: "計算機プログラムからの3次元再生像の性質"، 信学論 (C), **J62-C** (1979) 771-776.
- 5) 尾上守夫，金子正秀: "純バイナリー計算機プログラム"، 信学論 (C), **J62-C** (1979) 78-85.
- 6) R. Eschbach: "Comparison of error diffusion methods for computer-generated holograms," Appl. Opt., **30** (1991) 3702-3710.

付 録

Brown-Lohmannの方法と尾上-金子の方法について

Brown-Lohmannの方法による計算機プログラムならびに尾上-金子の方法による計算機プログラムは、いずれも Fig. A1 に示すような構造のセルからなるホログラムである。セルの開口の位置 P は複素数値の位相角に応じて変調し、開口の大きさ V は複素数値の振幅(絶対値)により変調する。ここでは、ひとつの複素数値を(ひとつのセルを) 4×4 画素で表示するものとする。Brown-Lohmannの方法と尾上-金子の方法との相違点は、開口の大きさ V のとりかたと、開口の位置 P のとりかたの2つである。まず、開口の大きさについてみると、Brown-Lohmannの方法は開口が上下対称となるよう振幅量子化数が3となるが、尾上-金子の方法は任意に選べるため振幅量子化数は5となる。次に、開口の位置についてみると、Brown-Lohmannの方法は

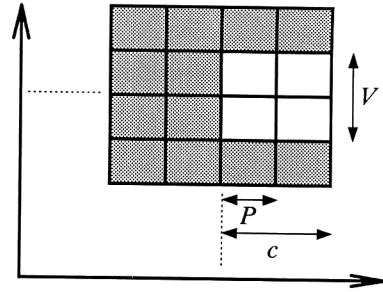


Fig. A1 Structure of cell in computer-generated hologram.

方形幅 c を一定(ここでは2画素)としているのに対して、尾上-金子の方法は方形幅 c を一定としていない(位相角によって2画素あるいは1画素)ため、位相方向の量子化数がBrown-Lohmannの方法の場合の2倍(ここでは8)となる。したがって、複素平面上で表示し得る点はBrown-Lohmannの方法が9点であるのに対して、尾上-金子の方法は33点となる。