

ノイズを含んだフーリエ振幅からの物体回復アルゴリズム

高橋 徹*・高城 洋明**・久保 哲也**

* 大分工業高等専門学校電気工学科 〒870-01 大分市牧 1666

** 九州工業大学工学部電子工学教室 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

An Algorithm for Object Recovery from the Contaminated Fourier Modulus

Tohru TAKAHASHI,* Hiroaki TAKAJO** and Tetsuya KUBO**

* Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology, 1666, Maki, Oita 870-01

** Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, 1-1, Sensui, Tobata-ku, Kitakyushu 804

We propose a method for recovering an object from its contaminated Fourier modulus. This method consists of the hybrid input-output (HIO) and the error reduction (ER) versions of the iterative Fourier transform algorithm. In the first stage of this method, HIO with a variable feedback parameter is carried out. In this stage a suitable function for evaluating the reconstruction error is used. In the following stage, ER is employed until its convergence is attained. The minimum-error object in the first stage is chosen as the initial object of ER. The effectiveness of the proposed method is verified by the computer simulation.

1. はじめに

物体のフーリエ振幅が測定によって得られるときに、物体そのものを回復する問題が古くから研究されてきた。2次元以上の物体に対しては、フーリエ振幅によって物体が一意に確定することは明らかにされたが¹⁾、その物体を得る手法の開発が課題となっている。現在において最も強力な方法は、Fienupによって提案されたフーリエ反復法であると筆者らは考える²⁾。フーリエ反復法では、その基本となる error reduction algorithm (ER)とその変形である hybrid input-output algorithm (HIO)が組み合わされて用いられることが一般的である。これをHIO/ERと呼ぶ。このHIO/ERは強力な方法であるが、フーリエ振幅にノイズ成分が存在しないときでさえも時として回復すべき物体(解)以外の物体に収束して停滞するという停滞問題を生じることが知られている³⁾。

これに対して筆者らはHIOを単独でしかもそのフィードバック定数を1に比べて十分小さくして用いることによって、停滞問題を生じることなく解物体を得ることができることを示した⁴⁾。ところがフーリエ振幅にノイズ成分が存在する場合には解そのものが存在しないの

で、筆者らの提案した方法をそのまま用いることはできない。そこで前回の報告において、繰返しごとに推定物体を生成してその回復度を適切に評価する関数を導入し、その値が最小となる物体を推定物体とする方法を提案した⁵⁾。本論文では、この評価の方法を改良し、HIOの能力を効率よく利用して、さらに良好な回復物体を得る手法を提案する。

2. HIOの挙動

フーリエ振幅からの物体の回復とは、物体 $f(x, y)$ に対して、そのフーリエ変換 $F(u, v)$ が

$$F(u, v) = \sum_{x, y} f(x, y) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{N}(ux + vy)\right\} \quad (1)$$

で定義されるとき、フーリエ振幅 $|F(u, v)|$ と物体に対する先験的知識から $f(x, y)$ を回復することである。ここで、サンプル空間を $N \times N$ としており、 x, y は物体領域の座標、 u, v は空間周波数を表している。 x, y, u, v は整数である。

フーリエ反復法は、フーリエ変換と逆変換を用いて、物体領域とフーリエ領域の拘束条件を繰返し適用して物体を回復するアルゴリズムである。本論文において

は、物体は非負性を有する実数値物体であるものとする。したがって物体領域の拘束条件にはサポート条件と非負条件を用いることができる。サポートとは物体の値がゼロ以外の値をとり得るサンプル点の集合である。またフーリエ領域の拘束条件の適用とは、物体のフーリエ振幅を測定されたフーリエ振幅によって拘束することをいう。

ERとHIOについて説明する。繰返しごとにフーリエ変換される物体を入力物体と呼び、繰返し回数 m 回目の入力物体を $g_m(x, y)$ とする。そのフーリエ変換を $G_m(u, v)$ とおく。ここで $G_m(u, v)$ の位相 $\theta_m(u, v)$ を保持しつつ、 $G_m(u, v)$ の振幅を測定によって得られたフーリエ振幅 $|\hat{F}(u, v)|$ で置き換えて、

$$G_m(u, v) = |\hat{F}(u, v)| \exp(i\theta_m(u, v)) \quad (2)$$

を生成する。これを逆フーリエ変換して得られる物体 $g'_m(x, y)$ を出力物体と呼ぶ。ERとHIOとでは、物体領域の拘束条件の適用の方法が異なる。ERは $m+1$ 回目の入力物体を

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (3)$$

と定める。ここで、 D は物体領域の拘束条件を満足するサンプル点の集合、すなわちサポート条件を満足し同時に出力物体の値が負でないサンプル点の集合である。したがってERの入力物体は常に物体領域の拘束条件を満足している。一方HIOは $m+1$ 回目の入力物体を

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ g_m(x, y) - \beta g'_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (4)$$

と定めるアルゴリズムである。ここで β は正の実数値をとるフィードバック定数である。ERとは $(x, y) \in D$ における処理が異なっており、入力物体は物体領域の拘束条件を満足しない。

フーリエ振幅にノイズ成分が存在しない場合には、HIOは β を1に比べて十分小さくして用いることによって、出力停滞物体への収束と脱出を繰返しながら解物体すなわちフーリエ領域と物体領域の両方の拘束条件を満足する物体に収束する⁴⁾。ここで出力停滞物体とは、繰返しごとに入力物体は変化しつづけるが出力物体は変化しない状態となる物体である。入力物体が繰返しによらず変化しなくなってHIOが不動状態となるのは、出力物体が解物体であるときのみである。したがってフーリエ振幅にノイズ成分が存在する場合には、HIOは不動状態となることができない。しかしこの場合でも β を小さくして用いるときには、HIOは解の近傍の物体にいったん到達しその後はこの近傍物体への収束と脱出

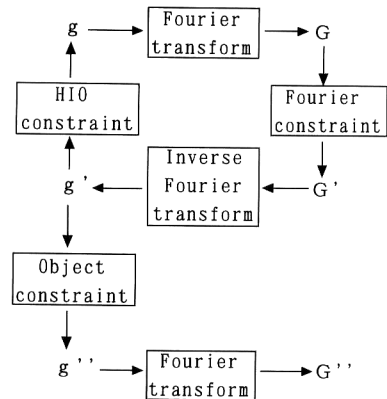


Fig. 1. HIO algorithm with the process for calculating the evaluation function E_m of the reconstruction error.

を繰り返すようになる^{5,6)}。

先の論文において筆者らは、フーリエ振幅に存在するノイズがさほど大きくない限り解物体の近傍にオブジェクトエラー E_{om} :

$$E_{om} = \left[\frac{\sum_{x,y \in D} \{g'_m(x, y)\}^2}{\sum_{x,y} \{g_m(x, y)\}^2} \right]^{1/2} \quad (5)$$

が極小となる物体が存在することを示した⁷⁾。筆者らはこの物体がフーリエ振幅にノイズが存在するときに回復すべき物体であると考え、これを理想推定物体と呼ぶことにする*1。したがってHIOを単独で β を1に比べて小さくしてある程度多めの繰返し処理を行い、その中で E_{om} が最も小さくなる物体を回復物体とすれば、理想推定物体が得られるものと期待される。ところが、大規模物体になると出力停滞物体の数が増えるため、出力停滞物体への収束と脱出という挙動が顕著に現れなくなって、出力停滞状態の抽出が困難となる。したがって E_{om} の最小となる物体を回復物体とする方法は物体の規模が大きくなるにつれ有効性が失われてゆく。

3. 評価関数の改良と β の可変性

すでに筆者らは、ノイズが存在する場合の方策として Fig. 1 に示すアルゴリズムを提案した。すなわちHIOの各回における出力像に対して像領域の拘束条件を適用して得られる像を推定像 $g''_m(x, y)$ とすることにし、この推定像の推定エラーを

*1 解物体がわかっているときには、理想推定物体は解物体を初期物体にし、ERを収束するまで実行することによって得られる。

$$E_m'' = \left[\frac{\sum_{u,v} \{ |G_m''(u, v)| - |\hat{F}(u, v)| \}^2}{\sum_{u,v} |\hat{F}(u, v)|^2} \right]^{1/2} \quad (6)$$

で評価, あらかじめ定められた回数の繰返しの中で E_m'' が最も小さい値となる推定像を回復像とすることにした⁵⁾. ただし, $|G_m''(u, v)|$ は $g_m''(x, y)$ のフーリエ振幅である. しかしながらこのアルゴリズムは E_{om} を評価関数として用いる場合に比べると有効に働くものの, まれではあるがよい回復度にならない場合も生じることが判明した. これは, 推定物体を得るときに物体領域の拘束条件としてサポート条件とともに非負条件をも用いているためであると考えられる. 前節で述べたように, 理想推定物体はERの収束物体であり, それゆえHIOの出力停滞物体の一つでもある^{*2)}. したがって回復物体は出力停滞物体であるかまたは少なくともその近傍の物体であることが必要である. しかしながら繰返し回数の早い段階では, サポート内において非負性を満足しないサンプル点が多数存在する. このため物体領域の拘束条件として非負性をも考慮した推定物体では, 出力停滞物体とかけ離れた物体であるにもかかわらずその E_m'' が小さな値となる可能性がある. そこで筆者らは推定物体を得る場合に適用する物体領域の拘束条件にサポート条件のみを用いることにする. すなわち Fig.1 において m 回目の推定物体を

$$g_m''(x, y) = g_m'(x, y) \quad (x, y) \in S \\ 0 \quad (x, y) \notin S \quad (7)$$

と定めることにし, この推定物体 $g_m''(x, y)$ の回復度の評価を, 式(6)とこの物体のフーリエ振幅 $|G_m''(u, v)|$ とを用いて得られる E_m'' によって行うことにする. ここで S はサポート条件を満たすサンプル点の集合である. 以後このように再定義された E_m'' を修正 E_m'' と呼ぶことにする.

Fig. 3 は, Fig. 2 に示した 32×32 の規模の原物体を HIO によって回復した場合のオブジェクトエラー E_{om} の繰返し回数に対する変化を掲げたものである. ただし, 繰返し回数は 8000 回とし, そのうちの最初の 1000 回までの変化を示している. β は 0.1 でフーリエ振幅には $\sigma = 3.5\%$ のノイズが含まれている. ただし, σ は

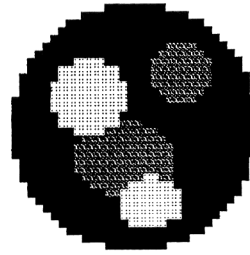


Fig. 2. Original object.

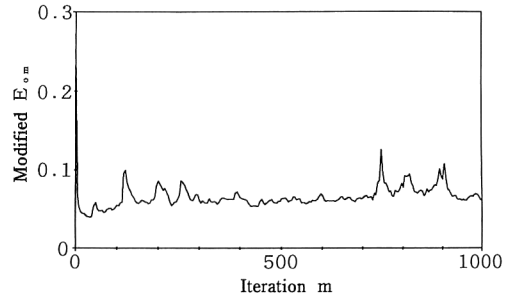


Fig. 3. Object-error E_{om} vs the iteration number m in the case where $\sigma = 3.5\%$ and $\beta = 0.1$.

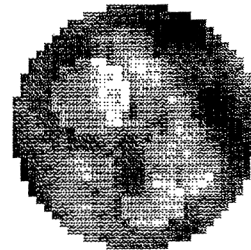


Fig. 4. Output object whose E_{om} takes the lowest value in Fig. 3.

$$\sigma = \left[\frac{\sum_{u,v} \{ |\hat{F}(u, v)| - |F(u, v)| \}^2}{\sum_{u,v} |F(u, v)|^2} \right]^{1/2} \quad (8)$$

によって定義され, $|\hat{F}(u, v)|$ と $|F(u, v)|$ とはそれぞれノイズを含む場合と含まない場合のフーリエ振幅である. Fig. 3 から出力停滞物体への収束とそれからの脱出という挙動が顕著には現れていないことがわかる. また, 繰返しの早い段階で E_{om} が最小になっている. Fig. 4 はこのときの出力物体である. この例の場合 E_{om} が最小となる物体を選ぶ方法では, 8000 回の繰返しにもかかわらず Fig. 4 の物体が選び出され, よい回復度が得られない.

これに対し, 本節で提案された修正 E_m'' を用いるアル

*2) 文献4)からわかるように, HIO は, $g_m(x, y) = g_m'(x, y)$ for $(x, y) \in D$ が成立し, かつオブジェクトエラーが極小となるとき出力が停滞する. ER が収束したとき, 最初の条件が成立するのは同文献の式(8)に示すとおりであり, 第2の条件が成立することはやはり同文献の式(6)あるいは Fig. 2 から明らかである.

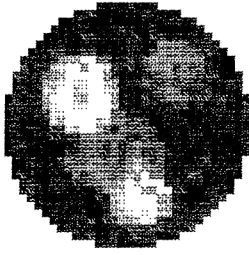


Fig. 5. Recovered object in the case where the modified E_m'' is used as the evaluation function of the reconstruction error. $\sigma=3.5\%$, $\beta=0.1$.

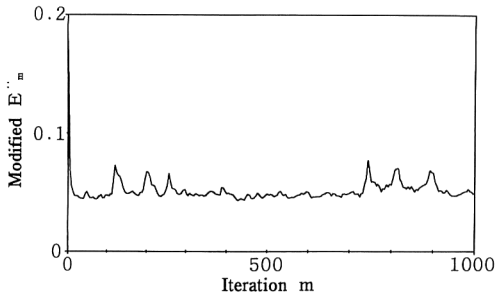


Fig. 6. The modified E_m'' vs. the iteration number m obtained in the simulation carried out in Fig. 5.

ゴリズムによる回復像を Fig. 5 に、修正 E_m'' と繰返し回数との関係を Fig. 6 に示す。先の状況が改善され、回復度も向上していることがわかる。筆者らが確かめた限りでは、この例に限らず修正 E_m'' を用いるアルゴリズムによれば E_{om} を用いるアルゴリズムに比べ、常により回復度を得ることができた。

さて、Fig. 7 にこの例の場合の理想推定物体を掲げる。Fig. 5 と Fig. 7 の比較から修正 E_m'' を用いるアルゴリズムは E_{om} を用いるアルゴリズムに比べ良好な結果をもたらすものの、理想推定物体とはまだ隔たりのあることがわかる。これは Fig. 5 を求めたときの HIO の出力物体が出力停滞物体でないためか、あるいは理想推定物体とは異なる出力停滞物体であるためか、あるいはそれらが同時に起こっているためであると考えられる。

この問題を克服する一つの方法は、 β をより小さくして筆者らのアルゴリズムを実行することである。なぜならば HIO は β を小さくするほど、出力停滞物体への収束とそれからの脱出という挙動を忠実に行うからである。しかしながら β を小さくするほど HIO の収束速度は遅くなり必要繰返し回数が増大する。このことは大規模物体の場合に特に深刻な問題となる。なぜならば、大規模物体の場合には 1 回の繰返しに要する計算量が大き

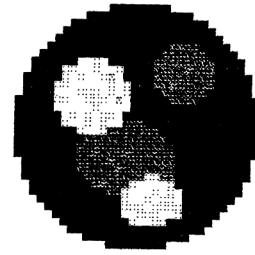


Fig. 7. The ideal estimation object.

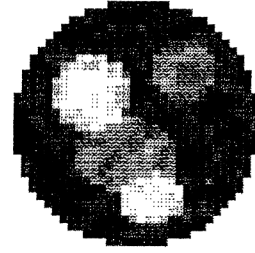


Fig. 8. Recovered object by the proposed algorithm. $\sigma=3.5\%$. β is set to 2.0 for the first 200 iterations. From the 201th iteration to the 1000th iteration, β is set to 0.1. After the 1001th iteration ER is employed.

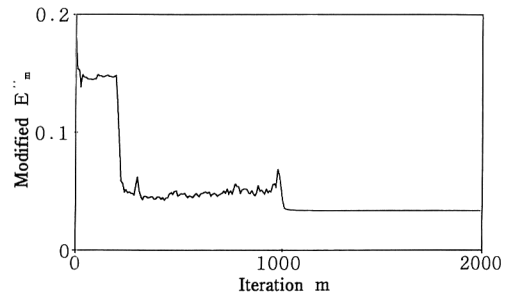


Fig. 9. The modified E_m'' vs. the iteration number m obtained in the simulation carried out in Fig. 8.

いうえに、必要繰返し回数の増大の程度が物体の規模とともに大きくなるからである。

この状況に対処するため筆者らは次の事実に着目する。すなわち、HIO は β を大きな値にすると出力停滞物体への収束とそれからの脱出という挙動を忠実にはとらなくなるものの、1 回の繰返しにおける入力物体の変化分が大きくなり、修正 E_m'' がある程度小さい物体を早い段階で得ることができる。したがって、はじめに β にある程度大きめの値（筆者らの経験によれば 1 よりも大きな値）を与え、次第に β に小さな値を与えることにすれば、 β を小さな値に固定して長い繰返しを行うのと同じ効果をあげることができる。また、出力停滞物体

に確実に到達するためには ER を利用すればよい。しかしながら ER は繰返しの途中で用いるべきではなく、繰返しの最後の段階で用いるべきである。なぜならば、繰返しの途中で用いると、HIO の能力を損ない結局は Fienup の HIO/ER と同じく停滞問題に悩まされることになるからである。

以上の考察より筆者らは以下に述べるアルゴリズムを提案する。まず HIO を実行する。このとき式(7)に示した物体を各回の推定物体とし、評価関数として修正 E_m'' を用いる。 β の値ははじめ 1 より大きな値とし、次第に 1 よりも小さな値にしてゆく。そして最後に ER を収束するまで実行する。ただし、 β を変化させるときおよび ER を実行するときは、それまでの繰返しの中で修正 E_m'' の値が最も小さくなったときの入力物体をそれ以後の初期物体とする。

Fig. 8 の物体は 200 回までの繰返しにおいて $\beta=2.0$ とし 201 回目から $\beta=0.1$ として HIO を実行し、1001 回目から ER を実行したときの回復物体である。Fig. 7 の理想推定物体と同じではないが、多くの繰返し回数を必要とすることなく理想推定物体に近い物体の得られていることがわかる。Fig. 9 にこのときの修正 E_m'' と繰返し回数との関係を示す。 β の値を可変にした効果と最後に ER を用いた効果がこの図にも現れている。筆者らは、 β の値の変化のさせかたや回数ならびに原物体を変えてシミュレーションを行ったが、いずれの場合も、これまでの E_{om} を用いる方法あるいは文献 5) で提案した方法よりも少ない回数で理想推定物体により近い物体を回復することができた。

4. ま と め

ノイズによって乱された物体のフーリエ振幅から物体そのものを回復する方法として、HIO の能力を生かして回復する方法を提案した。このためにまず推定物体の回復度を評価するための新たな関数を、以前に示した関数を修正することによって導入した。提案したアルゴリズムは次のとおりである：HIO のフィードバック定数 β をはじめ 1 に比べて大きな値にしておき、しだいに 1 より小さな値にしながら HIO を単独で実行し、最後に ER を実行する。ただし β の値を変化させるときおよび HIO から ER に処理を変えるときには、それまでの繰返しにおいて回復度の評価関数が最小となる時の入力物体を初期物体とする。この方法によれば、以前提案した方法よりも理想推定物体に近い回復物体を得ることができることを計算機シミュレーションによって確かめた。

文 献

- 1) Yu. M. Bruck and L. G. Sodin: "On the ambiguity of the image reconstruction problem," *Opt. Commun.*, **30** (1979) 304-308.
- 2) J. R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: a comparison," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 2758-2769.
- 3) J. R. Fienup and C. C. Wackerman: "Phase-retrieval stagnation problems and solutions," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3** (1986) 1897-1907.
- 4) 高城洋明, 高橋 徹: "位相回復におけるハイブリッドインプットアウトプット・アルゴリズムの能力について", *光学*, **22** (1993) 419-427.
- 5) 高城洋明, 高橋 徹: "ノイズ成分を有するフーリエ振幅からの像回復", *信学論, J77D-II* (1994) 2387-2389.
- 6) 野津 剛, 高橋 徹, 高城洋明: "位相回復アルゴリズムにおけるノイズの影響", 平成 5 年度電気関係学会九州支部連合大会講演論文集 (1993) p.13.
- 7) 高城洋明, 高橋 徹: "フーリエ反復法を用いた位相回復におけるノイズの影響", *光学*, **23** (1994) 439-443.