

## 空間周波数領域画像再構成に関する考察

鈴木 茂 人

北見工業大学情報システム工学科 〒090 北見市公園町 165

### Considerations for Image Reconstruction of Filtering Backprojection in the Spatial Frequency Domain

Shigehito SUZUKI

Department of Computer Sciences, Kitami Institute of Technology, 165, Koen-cho, Kitami 090

Image reconstruction of filtering backprojection images from projections in the spatial frequency domain is affected by two factors: the truncation of two-dimensional (2-D) backprojection data region and the discontinuity of 2-D frequency-domain reconstruction filters at the maximum frequency. The influence was studied from image reconstruction in single photon emission computed tomography using Hanning and Ramachandran-Lakshminarayanan filters. The truncation of backprojection data region was a much more important factor causing the degradation of reconstructed images than the discontinuity of reconstruction filters. However, it had no effect on reconstructions if the size of the backprojection image was taken to be at least four times the size of the reconstructed image. For this case the discontinuity of reconstruction filters had also no effect on reconstructions. The image reconstruction method produced more excellent results than the filtered backprojection method if a sufficiently large backprojection data region was used in image reconstruction.

#### 1. 序

投影からの画像再構成には、逆投影とフィルター処理の順序に関して2通りの方法がある。1つは、最初にフィルター処理を行い、次いでこの結果を逆投影するフィルター補正逆投影 (FB: filtered backprojection) 法である。この画像再構成法は空間領域で行い、フィルター処理にはコンボリューション演算が使われ、今日のX線CT (computed tomography) 画像や核医学のエミッションCT画像はこの方法によって得られている。もう1つの方法は、最初に逆投影、次いでフィルター処理を行う方法である。これには、フィルター処理を空間領域で行う方法と空間周波数領域 (以後単に周波数領域) で行う方法とがある。前者については、筆者らの報告<sup>1,2)</sup>がある。後者が前者より一般的な方法で、BF (backprojection filtering) 法<sup>3)</sup>とよばれ、この方法を本研究で取り上げる。この方法は、後述するように画像再構成においてFB法より大きな画像データ領域を必要とするため、現在実用的関心をはらわれていない。しか

し、BF法は、逆投影像が計測で得られると、そのための計算や補間処理を必要としない<sup>3)</sup>ので、そのアルゴリズムは多くの関心をひきつけてきた<sup>4-8)</sup>。

BF法は周波数領域における画像再構成法であるため、FB法では注意する必要がなかった問題について留意することが求められる。いわゆるデータの打ち切り (truncation) で、逆投影像データ領域の打ち切りの影響が重要である。ほかに、その性質に由来して周波数領域二次元画像再構成フィルターが最大周波数点で示す不連続の影響がある。これらは今までに指摘されてきた問題である<sup>3)</sup>が、BF法が実用的関心をひかないこともあって、この影響に関する取組みについては報告がない。本研究では、エミッションCTのSPECT (single photon emission CT) 画像再構成からこれらの問題について考察する。

#### 2. 方 法

BF法は、最初に投影データから逆投影画像を求め

る。この画像  $B(r, \theta)$  と原画像  $O(r, \theta)$  との間には次の関係が成立する：

$$B(r, \theta) = O(r, \theta) ** 1/r \quad (1)$$

ここで記号  $**$  は二次元コンボリューション演算を表し、 $(r, \theta)$  は空間領域における極座標で、 $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  に対して定義されている。二次元フーリエ変換を実行することによって式(1)から次式を得る：

$$F_2[O(r, \theta)] = F_2[B(r, \theta)]R \quad (2)$$

ここで  $F_2$  は二次元フーリエ変換を表し、 $R$  は周波数領域における極座標  $(R, \phi)$  の動径成分で、この極座標は  $R \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$  に対して定義されている。普通、 $R$  は投影データの統計的雑音を考慮してある窓関数  $H(R)$  を用いて修正され、下で定義する関数  $G(R, \phi)$  によって置き換えられる：

$$G(R, \phi) = \begin{cases} RH(R) & 0 \leq R \leq R_{\max} \\ 0 & R > R_{\max} \end{cases} \quad (3)$$

ここで  $R_{\max}$  は最大周波数で、画素幅を  $d$  とすると  $1/(2d)$  に等しい。関数  $G(R, \phi)$  は二次元画像再構成フィルターを表し、 $H(R)$  が角度  $\phi$  に依存しないことから、 $G(R, \phi) = G(R)$  と表すことができる。フィルター関数は、 $R > R_{\max}$  でゼロの値をとるので、その境界  $R = R_{\max}$  で一般に不連続が生じる。フィルター関数  $G(R)$  によって逆投影画像のフーリエ係数は次のように補正される：

$$F_2[\hat{O}(r, \theta)] = F_2[B(r, \theta)]G(R) \quad (4)$$

ここで  $\hat{O}(r, \theta)$  は原画像  $O(r, \theta)$  の推定値である。このフィルター補正フーリエ係数を二次元逆フーリエ変換することによって再構成画像  $\hat{O}(r, \theta)$  が得られる。

窓関数として次の2つを使用した：

$$H(R) = 1 \quad (5)$$

ならびに

$$H(R) = 0.5 \left\{ 1 + \cos\left(\frac{\pi R}{R_{\max}}\right) \right\} \quad (6)$$

ここで窓関数は  $0 \leq R \leq R_{\max}$  に対して定義される。これらの窓関数をもつ二次元画像再構成フィルターを一次元フィルターの例にならってそれぞれ Ram-Lak (Ramachandran-Lakshminarayanan) フィルターならびに Hanning フィルターとよぶことにする。Ram-Lak フィルターの値は周波数  $R$  に正比例するので、境界  $R = R_{\max}$  で大きな不連続が生じる。これとは対照的に Hanning フィルターはこの境界でゼロの値をとり、連続的に変化する。

原画像に対する再構成画像の類似度を画像間の距離を表す次の2つの指標<sup>2,9)</sup>から計算した：

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |O(i, j) - \hat{O}(i, j)|}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M O(i, j)} \quad (7)$$

ならびに

$$d_r = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [O(i, j) - \hat{O}(i, j)]^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [O(i, j) - \langle O \rangle]^2} \right\}^{1/2} \quad (8)$$

ここで  $O(i, j)$ 、 $\hat{O}(i, j)$  はそれぞれ上の原画像ならびに再構成画像に対する離散的表現で、 $M$  は画像の大きさを表し、 $\langle O \rangle$  は原画像における平均の画素値である。主として、 $d_m$  と  $d_r$  は小さな相違と大きな相違にそれぞれ依存してその値を大きくさせる<sup>9)</sup>。

### 3. 結果と考察

Fig. 1~3 は、Hanning フィルターを使用した BF 法による大きさ  $64 \times 64$  の肝 SPECT 画像とこの画像再構成に用いた逆投影画像を示す。Fig. 1 は大きさ  $64 \times 64$  の逆投影画像を示し、Fig. 2 と Fig. 3 はそれぞれ  $128 \times 128$  と  $256 \times 256$  の逆投影画像を表す。高速フーリエ

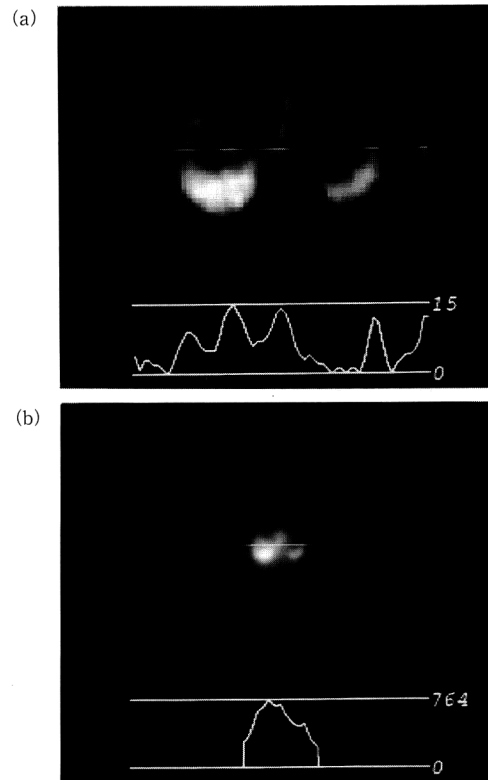


Fig. 1. Liver SPECT image (a) of a patient on a  $64 \times 64$  matrix, obtained from the backprojection image (b) of the same size using Hanning filter. The profile curves show values for pixels along the horizontal line passing the center of each figure. In Fig. 1 (a) artifacts appear along the right margin.

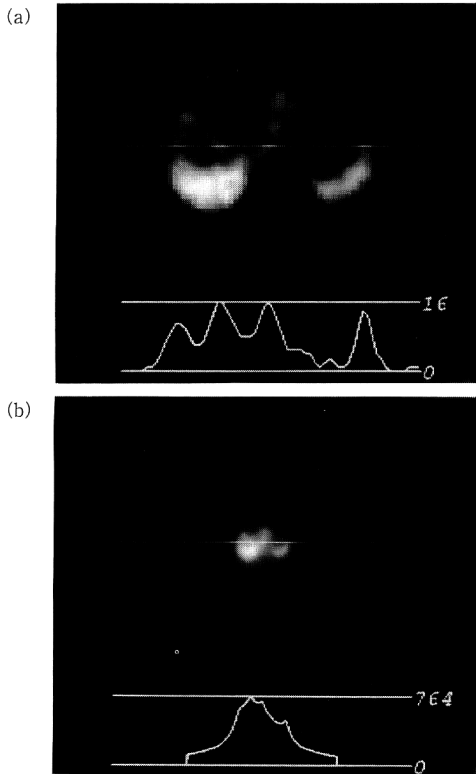


Fig. 2. Liver SPECT image (a) obtained from the backprojection image (b) of size  $128 \times 128$  using Hanning filter.

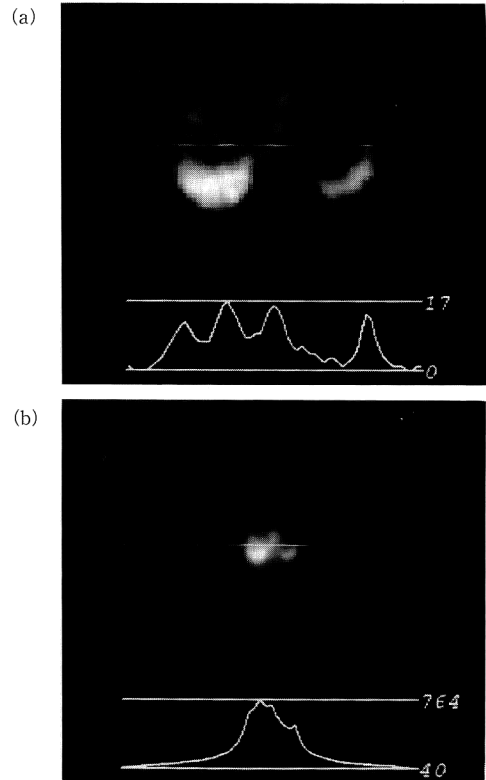


Fig. 3. Liver SPECT image (a) obtained from the backprojection image (b) of size  $256 \times 256$  using Hanning filter.

変換を使用したので、逆投影画像の大きさとしてこのような数値が選ばれた。投影データは、回転型 SPECT 装置を用い、患者の周囲  $360^\circ$  に  $6^\circ$  間隔の 60 方角から計測して得た。1 方角あたりのデータ数は 64 で、それらを 5.5 mm 間隔で収集した。上の逆投影画像は、これらの投影データに対してガンマ線光子の吸収補正を行ってから求めた。Fig. 1 の逆投影画像は、そのプロフィール曲線の両端に示されるように、端でデータの打ち切りによる急激な画素値の変化を示す。一方、Fig. 2 と Fig. 3 の逆投影画像は、Fig. 1 で急激な変化が生じた場所に対しては滑らかな画素値の変化を示す。これは、これらの逆投影画像が Fig. 1 の逆投影画像をその外側に向かって滑らかに拡大したように変化することによる。これに対応して、Fig. 1 の再構成画像には右端の上から下に沿って高い画素値を示す模様、すなわちアーチファクトがみられるが、Fig. 2 と Fig. 3 には現れていない。これから、アーチファクトは Fig. 1 に示されるような、再構成画像の大きさに一致する領域で生じた逆投影領域の打ち

りに起因するといえる。フィルター関数の不連続性による影響も予想される<sup>9)</sup>が、使用した Hanning フィルターは、既述したように最大周波数境界上で連続的に変化する<sup>10)</sup>ので、その影響はこの場合無視できると考えられる。しかし、この影響は後で述べるが Ram-Lak フィルターでは無視できず、アーチファクトの増強が観察された。

データの打ち切りは、一般にフーリエ係数の大きな変動をもたらす<sup>10)</sup>と予測されるので、これをみるため式 (4) 右辺のフィルター補正フーリエ係数  $F_2[B(r, \theta)]G(R)$  に対する離散的表現を  $B^*(u, v)$  とし、Fig. 1(a) から Fig. 3(a) の画像再構成で使用したフィルター補正フーリエ係数の大きさ  $|B^*(u, v)|$  を Fig. 4(a) ~ (c) に示した。直流分は図の中心に位置し、中心部が低周波成分、周辺部が高周波成分を表す。プロフィール曲線は、中心を通る水平方向上の周波数成分  $|B^*(u, 0)|$  を表している。Fig. 4(a) では、中心を通る水平ならびに垂直の 2 方向に沿って線状の様子が不鮮明ながら観察さ

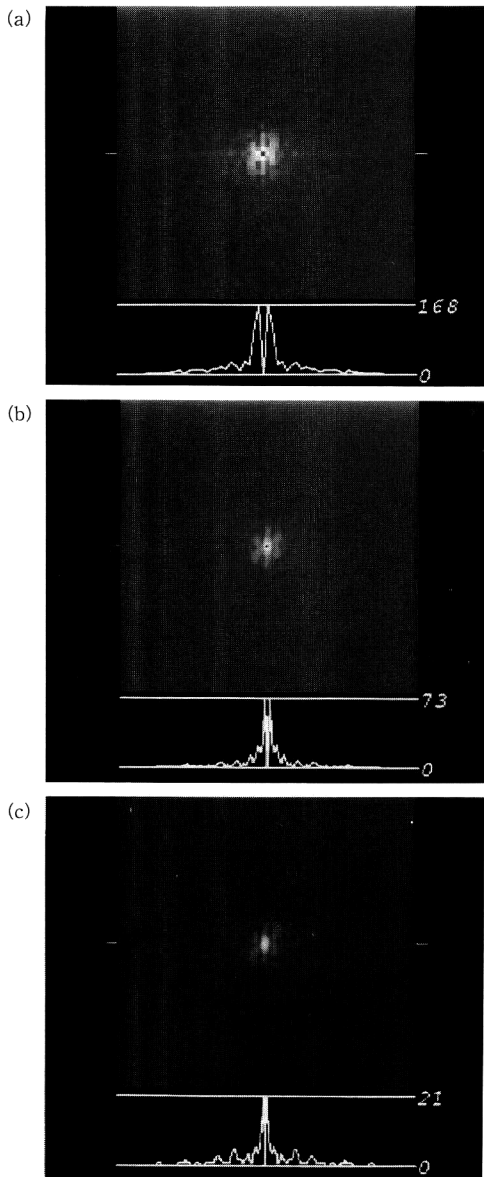


Fig. 4. Magnitude  $|B^*(u,v)|$  of the filtered Fourier coefficients used in image reconstruction for Figs. 1, 2 and 3: (a) Fig. 1; (b) Fig. 2; (c) Fig. 3. The direct component is situated at the center of figures. The central and peripheral parts express low and high frequency component regions, respectively. The profile curves show values of  $|B^*(u,v)|$  for  $v=0$  in the horizontal direction which is indicated by short lines at either side.

れる。この模様は、下で示す Fig. 5(b)ではより明瞭にみられる。これは、逆投影像データ領域の打ち切りに由来するフーリエ係数の変動を表し、Fig. 4(b)と(c)では確

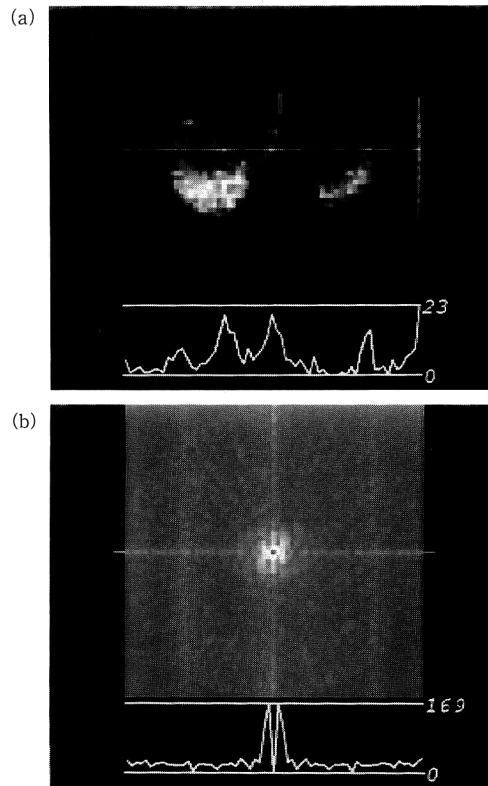


Fig. 5. Liver SPECT image (a) obtained from the backprojection image in Fig. 1 (b) using Ram-Lak filter, and the magnitude of the filtered Fourier coefficient (b) used in the image reconstruction. In Fig. 5 (a) artifacts appear more sharply than those in Fig. 1 (a) along the right margin.

認されない。

Fig. 5(a)と(b)は、Ram-Lak フィルターを用いて大きさ  $64 \times 64$  の逆投影像から求めた再構成画像とこのときのフィルター補正フーリエ係数をそれぞれ示す。Fig. 5(a)にはアーチファクトが Fig. 1(a)より鮮明に現れている。Fig. 5(b)では逆投影像データ領域の打ち切りに由来するフーリエ係数の変動が、線状の模様として中心を通る水平ならびに垂直の2方向に沿って Fig. 4(a)におけるより明確に観察される。これは、Fig. 5(b)のプロファイル曲線が示すように高周波数成分が Fig. 4(a)に比較して増幅され、大きい値をとったことによる。これがアーチファクトの増強をもたらしたといえる。このように、周波数に正比例した値をとって境界点  $R=R_{\max}$  で大きな不連続を示す Ram-Lak フィルターの性質がアーチファクトに影響を与えた。大きさ  $128 \times 128$  の逆投影像から求めた再構成画像では Hanning フィルターの

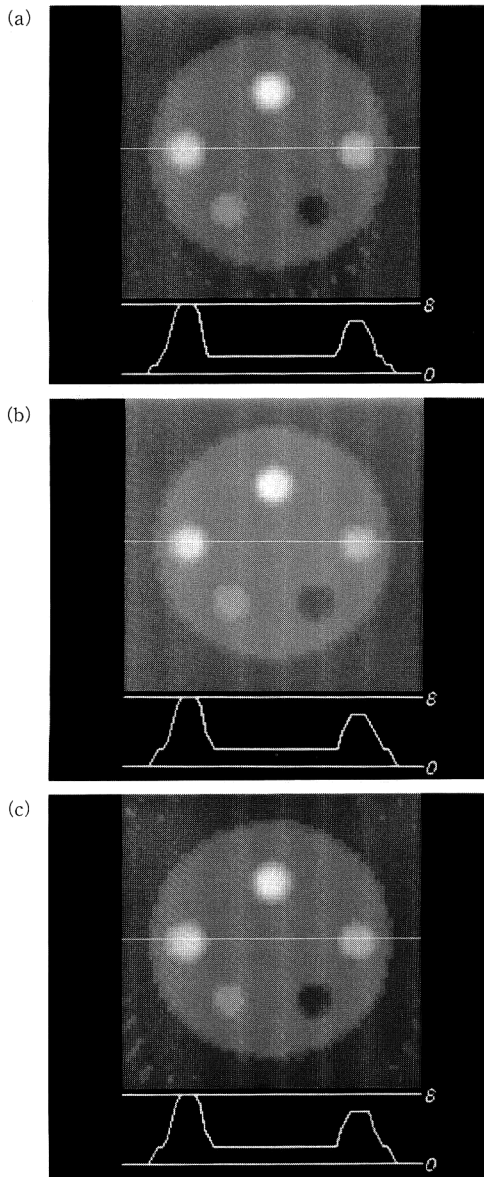


Fig. 6. Reconstructions of the mathematical phantom used in computer experiments on a  $64 \times 64$  matrix, obtained using Hanning filter from the backprojection images of sizes  $128 \times 128$  and  $256 \times 256$ , and obtained by the FB method: (a) reconstruction from the  $128 \times 128$  backprojection; (b) reconstruction from the  $256 \times 256$  backprojection; (c) reconstruction using the FB method. The mathematical phantom consists of one cold spot (0) and four hot spots (4, 6, 8 and 10) in a uniform background (2). Numbers in the bracket show levels of radioactivity in units of pixel counts. The profile curves express values for pixels along the horizontal line passing the center of each figure. They show superior reconstructions of two hot spots of levels 6 and 8.

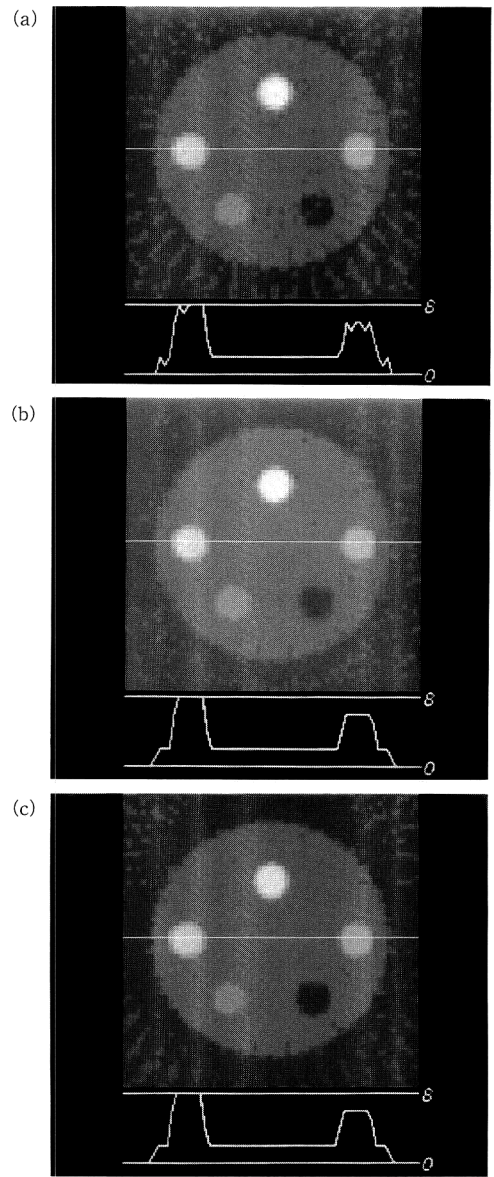


Fig. 7. Reconstructions of the mathematical phantom, obtained in a manner similar to for Fig. 6 using Ram-Lak filter: (a) reconstruction from the  $128 \times 128$  backprojection; (b) reconstruction from the  $256 \times 256$  backprojection; (c) reconstruction using the FB method.

場合と同様にアーチファクトは出現しなかった。したがって、逆投影像データ領域の打ち切りの影響が無視できるほど小さくなったとき、フィルターの性質に由来する境界点での不連続性はもはや問題とならないと結論できる。アーチファクトが形成された場所に関しては、数学的に十分な説明ができなかった。これは今後の課題で

ある。

逆投影像の大きさが  $128 \times 128$  や  $256 \times 256$  になると、すなわち再構成画像の4倍以上になると、上で求めたBF法による結果はFB法による再構成画像と視覚的には遜色がなかった。これを確認するため、画素値をあらかじめ設定できる数値ファントムを用いた計算機実験を行った。統計的雑音は高周波数成分に寄与し、再構成結果に影響を及ぼすので、投影データ中に統計的変動が存在しない状態のもとで画像再構成を行った。数値ファントムは、Fig. 6 と Fig. 7 に示すように異なった放射能強度をもつ5つの小さな円状放射能分布からなる。投影データの計算は、ガンマ線光子の吸収がない場合を考えたので、数値ファントムの周り  $180^\circ$  に対して行った。計算は  $6^\circ$  間隔の30方角に対して行い、上の場合と同様に1方角あたりのデータ数は64、収集間隔は5.5 mmであった。

Fig. 6 には Hanning フィルターを使用し、大きさ  $128 \times 128$  と  $256 \times 256$  の逆投影像から求めた数値ファントムの再構成画像がそれぞれ示されている。比較のためFB法による再構成画像も示した。同様に Fig. 7 には Ram-Lak フィルターを用いて得た再構成画像が示されている。Fig. 6 と Fig. 7 のプロフィール曲線は各画像の中心を通る水平線上の各画素に対するものである。これから、画素値単位で6と8の放射能強度をもつ2つの円状分布と2の放射能強度をもつバックグラウンド領域が正確に再生されているのがわかる。これは、ほかの円状分布に対してもあてはまる。原画像に対するこれらの画像の類似度を定量的に評価するため、その  $d_m$  値と  $d_r$  値を Table 1 に示す。

Table 1 から、使用したそれぞれの再構成フィルターに対しては  $256 \times 256$  の逆投影像から求めた再構成画像が原画像に最も近く、FB法を上回る結果であったことがわかる。すなわち、その  $d_m$  値は対応するFB法のそれより11~19%低く、 $d_r$  値も11%低かった。一方、FB法の  $d_m$  値は  $128 \times 128$  の逆投影像から求めた再構成

画像のそれより14~26%低く、その  $d_r$  値も11%低かった。しかし、 $128 \times 128$  の逆投影像から求めた再構成画像も上で述べたように原画像の放射能強度を正確に再生している。BF法において対応する Hanning と Ram-Lak フィルターの結果を比較すると、 $d_m$  は前者が後者より低い値を示したが、 $d_r$  は後者が前者よりわずかに低い値を示した。これは、2つのフィルターの性質を反映した結果といえる。すなわち、小さな高周波数成分をもつ Hanning フィルターはバックグラウンド領域における画素値の変動を抑え、元の画素値に対する再構成値の小さな誤差を減らすので、より低い  $d_m$  値が得られた。他方、大きな高周波数成分をもつ Ram-Lak フィルターはファントム中のオブジェクトの輪郭を原画像どおりに鮮明に再生し、大きな誤差を減らすので、より低い  $d_r$  値が得られた。これらは、Hanning フィルターによる Fig. 6 の画素値の変動が Fig. 7 より少ないことと、Ram-Lak フィルターによる Fig. 7 の円状放射能分布が Fig. 6 より鮮明なコントラストを示すことから視覚的にも確認できる。

#### 4. 結 論

BF法画像再構成における逆投影像データ領域の打ち切りと二次元画像再構成フィルターの不連続性に起因する影響について調べた。前者の影響が重要であったが、これは逆投影像のデータ領域を大きくとることによって低減され、その大きさを再構成画像の4倍以上に選んだとき、実質的な影響は観察されなかった。このような場合にはフィルター関数の示す不連続性はなんら問題とならなかった。逆投影像が再構成画像の16倍の大きさになると、BF法はFB法より優れた再構成画像をもたらした。したがって、再構成結果の正確さが強く求められる場合、BF法はそれに最適な方法である。

#### 文 献

- 1) 鈴木茂人, 荒井博史: “二次元コンボリューション画像再構成法の改良とSPECTへの応用”, *Radioisotopes*, **39** (1990) 155-162.
- 2) S. Suzuki: “Spatially limited filters for the two-dimensional convolution method of reconstruction, and their application to SPECT,” *Phys. Med. Biol.*, **37** (1992) 37-52.
- 3) Z. H. Cho, J. P. Jones and M. Singh: *Foundations of Medical Imaging* (John Wiley & Sons, New York, 1993) pp. 87-88.
- 4) R. H. T. Bates and T. M. Peters: “Towards improvements in tomography,” *New Zealand J. Sci.*, **14** (1971) 883-896.
- 5) P. R. Smith, T. M. Peters and R. H. T. Bates: “Image

Table 1. The picture distances,  $d_m$  and  $d_r$ , for Figs. 6 and 7 obtained by the BF and FB methods.

Figure	Method	Filter	Backprojection size	$d_m$	$d_r$
6 (a)	BF	Hann	$128 \times 128$	0.218	0.216
6 (b)	BF	Hann	$256 \times 256$	0.130	0.171
6 (c)	FB	Hann		0.161	0.192
7 (a)	BF	Ram-Lak	$128 \times 128$	0.228	0.213
7 (b)	BF	Ram-Lak	$256 \times 256$	0.174	0.168
7 (c)	FB	Ram-Lak		0.195	0.191

- reconstruction from finite numbers of projection," J. Phys. A: Math. Nucl. Gen., **6** (1973) 361-382.
- 6) G. T. Gullberg: "The reconstruction of fan-beam data by filtering the back-projection," Comput. Graphics Image Process., **10** (1979) 30-47.
  - 7) S. W. Rowland: "Computer implementation of image reconstruction formulas," *Image Reconstruction from Projections. Implementation and Applications*, ed. G. T. Herman (Springer-Verlag, Berlin, 1979) pp. 64-75.
  - 8) S. Suzuki and S. Yamaguchi: "Comparison between an image reconstruction method of filtering backprojection and the filtered backprojection method," Appl. Opt., **27** (1988) 2867-2870.
  - 9) G. H. Herman: *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography* (Academic, New York, 1980) pp. 66-67.
  - 10) E. O. Brigham: *The Fast Fourier Transform and Its Applications* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988) pp. 172-175.