

シフトバリエーションな psf によって劣化した画像の復元 — 行列演算反復法 —

小出 温子・小松 進一

早稲田大学理工学部応用物理学科 〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1

Blind Recovery for Degraded Images Blurred with Shift Variant PSF: Matrix Iterative Method

Atsuko KOIDE and Shinichi KOMATSU

Department of Applied Physics, Waseda University, 3-4-1, Ohkubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169

The conventional iterative Fourier transform blind deconvolution algorithm is effective when the psf is shift invariant. We propose a new blind image recovery algorithm using matrices that is applicable to the case in which the psf is shift variant. This new algorithm is an expanded method based on the pseudo-inverse matrix calculation using the singular value decomposition. Image reconstruction from blurred images of several original images was successfully performed with this algorithm.

1. はじめに

劣化像は、原画像と劣化の原因となる点像分布関数 (psf) により表される。ここで、psf が既知である場合には、劣化像と psf から原画像を求めることができるが、例えば大気ゆらぎによる劣化を受けた天体の観測像のように、psf が未知である場合には、劣化像のみから原画像を求めることとなり、非常に難しい問題となる。この問題を解くことをブラインド・デコンボリューションという。

Ayers と Dainty が提案したフーリエ反復型ブラインド・デコンボリューション・アルゴリズム (AD アルゴリズム)¹⁾ では、前提として psf がシフトインバリエーションであることが要求される。しかし、結像光学系では psf は一般にシフトバリエーションである場合が多い。この場合には、従来のブラインド・デコンボリューション法では対応できないことになる。そこで本研究では、観測像のみが既知であり、psf がシフトバリエーションである場合にも有効であるように AD アルゴリズムを拡張し、そのアルゴリズムの有効性を計算機シミュレーションにより確認することを目的とする。

2. 原 理

2.1 フーリエ反復型ブラインド・デコンボリューション

従来行われている AD アルゴリズムを用いたフーリエ反復型ブラインド・デコンボリューション法では、画像の劣化モデルは次式のようなコンボリューションにより表される。

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) h(x - \xi) d\xi + n(x) \quad (1)$$

式(1)において、 $f(x)$ が原画像、 $g(x)$ が劣化像、 $h(x)$ が psf、 $n(x)$ が加算ノイズである。

ここでは、psf による劣化の過程はコンボリューションを仮定しており、AD アルゴリズムでは psf がシフトインバリエーションであることが前提条件となっている。ノイズが無視できる場合には、式(1)の両辺についてフーリエ変換を行うと、 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ のそれぞれのフーリエ変換 $F(u)$ 、 $G(u)$ 、 $H(u)$ を用いて式(2)の形で表される。

$$G(u) = F(u) \odot H(u) \quad (2)$$

劣化像 $g(x)$ は与えられているので $G(u)$ は既知であり、原画像 $f(x)$ あるいは psf $h(x)$ のどちらかが推定できれば、式(2)からもう一方を推定できる。このように

E-mail: komatsu@mn.waseda.ac.jp

$f(x)$ と $h(x)$ の推定を交互に反復することにより AD アルゴリズムではデコンボリューションを行っている。

2.2 行列を使った劣化モデル

上記のように、AD アルゴリズムは psf がシフトインバリエントであることを前提としているので、シフトバリエントな劣化を受けている画像の回復にはそのままでは適用できない。現実の光学系による結像では一般に psf がシフトバリエントであるから、その場合には従来の AD アルゴリズムで対応できないことになる。そこで、画像がシフトバリエントな劣化を受けている場合にも対応できるように、画像の劣化モデルを以下のように行列とベクトルを用いて表す。

原画像の任意の一画素 i に対応する psf の形は、1 個の列ベクトル $\mathbf{h}_i = (h_{1i}, h_{2i}, \dots, h_{Mi})^t$ で表すことができる。ベクトル \mathbf{h}_i は原画像の各画素で別々に定義され、原画像の画素数 M の数だけ与えられる。これらを一つの行列にまとめた劣化行列 $H = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_M)$ により原画像全体のシフトバリエントな劣化の様子を表すことができる。ここで、劣化行列 H は $M \times M$ の正方行列である。

psf をベクトルで表したことに対応して、各画像もベクトルで表す。原画像と劣化像をベクトルで表したものをそれぞれ原画像ベクトル $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_M)^t$ 、劣化像ベクトル $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_M)^t$ とし、付加ノイズを同様にベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)^t$ で表すと、これらを用いて画像の劣化モデルは次式のように記述できる²⁾。

$$\mathbf{g} = H\mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (3)$$

ノイズの項については無視すると、劣化像 \mathbf{g} は既知であるので、劣化行列 H が与えられれば式(3)より原画像 \mathbf{f} が求められる。一方原画像 \mathbf{f} が与えられた場合に、1 組の劣化像 \mathbf{g} と原画像 \mathbf{f} だけでは情報量が足らず、劣化行列 H を求めることができない。そこで、同じ劣化行列で表される劣化を受けた複数枚の劣化像の集合 $\{\mathbf{g}_j\} (j=1, 2, \dots, K; K \leq M)$ について考える。ここで K は画像の枚数である。各劣化像 \mathbf{g}_j のそれぞれは、式(3)を満足するから、次式のように表される。

$$\mathbf{g}_j = H\mathbf{f}_j + \mathbf{n}_j, \quad j=1, 2, \dots, K; \quad K \leq M \quad (4)$$

ここで、劣化像集合 $\{\mathbf{g}_j\}$ を 1 個の行列にまとめて $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_K)$ で表し、これを劣化像行列とする。原画像集合 $\{\mathbf{f}_j\}$ 、ノイズ集合 $\{\mathbf{n}_j\}$ についても同様にまとめて原画像行列 $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_K)$ 、ノイズ行列 $N = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_K)$ と表すと、各 j についての式(4)をまとめて、1 つの行列の演算式で表すことができる。

$$G = HF + N \quad (5)$$

式(5)は K 枚の画像の劣化の様子を同時に表したものであり、その psf はシフトインバリエントな場合に限定されない。今回提案する手法では、式(5)を基にして同じ劣化を受けている複数枚の画像を同時に扱うアルゴリズムを組むことにする。

式(5)において加算ノイズを無視すると、劣化像行列 G は既知の情報であるので、劣化行列 H が与えられたときに、劣化行列 H の逆行列 H^{-1} を求めることができれば、原画像行列 F が $F = H^{-1}G$ より求められる。同様に原画像行列 F が与えられて、その逆行列 F^{-1} が求められれば、劣化行列 H が得られる。したがって、原画像の推定から式(5)を用いて psf を求め、それに拘束条件を課す過程と、そこで得られた拘束条件を満足する psf の推定から式(5)を用いて原画像を推定する過程を交互に繰り返すことにより、psf がシフトバリエントな場合についても原画像と psf を求めていくことができる。このように、AD アルゴリズムにおけるフーリエ変換の代りに逆行列を用いることにより、シフトバリエントな結像系についてもアルゴリズムを組むことができる。

2.3 特異値分解を用いた疑似逆行列の決定

式(5)を基本とするアルゴリズムを実行するには行列 H, F の逆行列を求めることが必要である。しかし、用意する原画像の枚数が少なく、既知の情報を与える劣化像の枚数が不足したり、複数枚の原画像間の一次独立性が低い場合、一般的に行列 F は正則でない場合のほうが多いと考えられる。また、アルゴリズムの反復の過程において、正則でない F により推定される劣化行列 H も一次独立性が下がり正則でなくなる。任意の行列 A が正則であれば行列 A に対する逆行列 A^{-1} が一意に求められるが、行列 A が正則でない場合には逆行列を求めることができない。そこで、行列が正則でない場合にも対応できるように、行列の特異値分解 (singular value decomposition, SVD) を用いて行列 A の疑似逆行列²⁾ を求めることにする。

ここで、行列の特異値分解とは任意の行列 A が次の形に分解されることをいう。

$$A = UWV^T \quad (6)$$

式(6)において、 U, V は直交行列、 W は対角化行列である。このとき、行列 A の疑似逆行列 A^\dagger が次式により与えられる^{3,4)}。

$$A^\dagger = VW^+U^T \quad (7)$$

式(7)において、 W^+ は対角化行列 W の i 番目の対角要素 w_i の逆数 $1/w_i$ ($w_i=0$ の場合は $w_i^+=0$) を要素

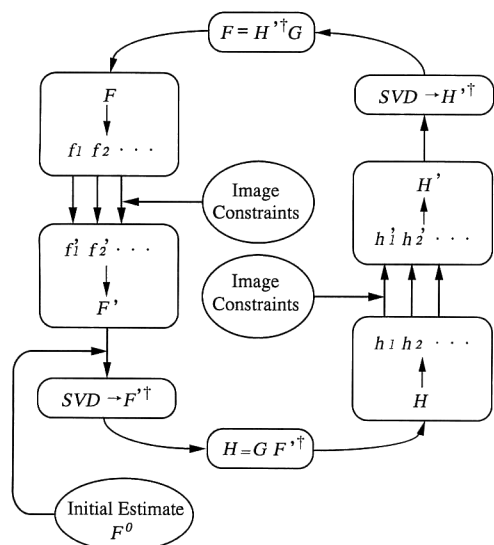


Fig. 1. MIM (matrix iteration method).

とする対角化行列である。ここで行列 A が正則であれば、式(7)により与えられる A^+ は行列 A の逆行列 A^{-1} に等しい。特異値分解により疑似逆行列を求めることによって、原画像行列 F や劣化行列 H が正則でない場合でも、行列 F の推定から行列 H を求めることができ、またその逆も可能になる。

この特異値分解を用いて Fig. 1 のような反復型アルゴリズムを組む。その各ステップでは、以下のことを行う。

- (1) 各原画像 f_j についてそれぞれ初期予想 f_j^0 ($j=1, 2, \dots, K; K \leq M$) を用意し、まとめて原画像行列 F の初期予想 F^0 とする。
- (2) 特異値分解により F^0 の疑似逆行列 F^{0+} を求める。
- (3) 劣化行列 G と F^{0+} から劣化行列 H を推定する。
- (4) 推定した劣化行列 H を各 psf h_i に分解し、それぞれに原画像面での拘束をかけ、再び行列の形にまとめ、推定 H' とする。
- (5) 特異値分解により推定 H' の疑似逆行列 H'^+ を求める。
- (6) 劣化行列 G と H'^+ から原画像行列 F を推定する。
- (7) 推定した原画像行列 F を各原画像 f_j に分解し、それぞれに原画像面での拘束をかけ、再び行列の形にまとめ、推定 F' とする。
- (8) (2) から (7) を収束するまで反復する。

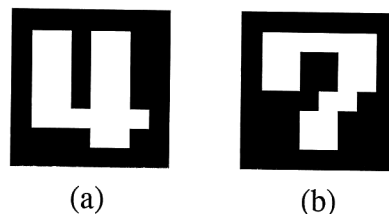


Fig. 2. Two original images (8×8) picked out from 64 original images. (a) Original image 1, (b) original image 2.

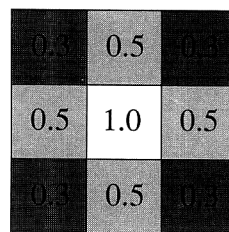


Fig. 3. Shift variant point spread function (3×3).

以上がアルゴリズムの概要である。以下、このアルゴリズムを MIM (matrix iterative method) と呼ぶことにする。拘束条件としては、非負性やサポート条件等の *a priori* な情報を用いている。

3. 計算機シミュレーション

提案した手法の有効性を確認するため、計算機シミュレーションを行った。原画像として数字とアルファベットの 2 値画像を 64 種類用意した。これに対応する原画像行列 F のランクは 54 であり、その特異値のうち 37 個は 10^{-1} 以上のオーダーで残りは 10^{-6} 以下のオーダーであった。そのうちの 2 つを Fig. 2 (a) と (b) (以下、(a) を“原画像 1”, (b) を“原画像 2”と呼ぶ) に示す。これらの画素サイズは 8×8 で、黒の部分が 0、白の部分が 1 である。64 種類用意した理由は、原画像の画素数 $M (= 8 \times 8)$ に対して劣化行列の大きさが $M \times M$ になるからである。

まず psf がシフトインバリエントである場合についてシミュレーションを行った。ここで用いた psf は 3×3 の大きさで、その各画素の値は Fig. 3 に示されるとおりである。この psf を用いて“原画像 1”と“原画像 2”にシフトインバリエントな劣化を与えた像を Fig. 4 (a) と (b) に示す。

原画像の初期予想には、原画像に正のランダムノイズをのせたものを用いており、これに対応する画像行列のランクは 64 であった。各原画像と psf に対する拘束条

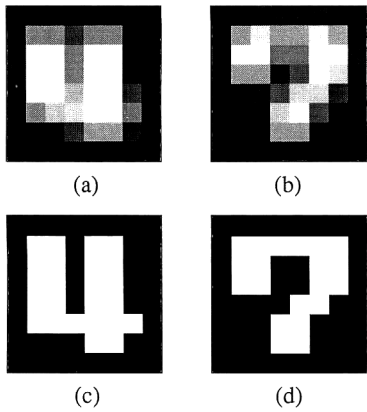


Fig. 4. Image reconstruction on simulation of blurred images degraded with shift invariant psf. (a) Degraded image of original image 1, (b) degraded image of original image 2. (c), (d) Reconstructed images of Fig. 4 (a), (b), respectively.

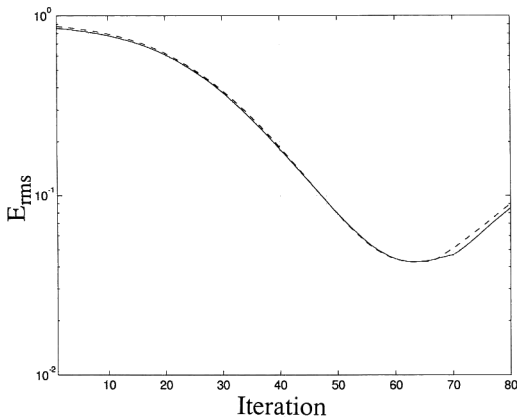


Fig. 5. Root mean square error E_{rms} vs. Iteration count for the case of shift invariant psf shown in Fig. 4. Solid line: original image 1, and dashed line: original image 2.

件として非負性とサポート条件を用いている。このときの回復結果が Fig. 4(c)と(d)であり、Fig. 2(a), (b)の原画像がほぼ完全に復元されていることがわかる。

また、今回アルゴリズムの収束性に対する評価として次式のような rms 誤差を用いた。

$$E_{rms,j} = \sqrt{|f_j - \hat{f}_j|^2 / |f_j|^2} \quad (8)$$

式(8)において、 f_j は j 番目の原画像であり、 \hat{f}_j はそれに対する推定画像である。

psf がシフトインバリエントである場合の rms 誤差を Fig. 5 に示す。Fig. 5 で、実線が“原画像 1”の劣化像 (Fig. 4(a)), 破線が“原画像 2”の劣化像 (Fig. 4(b)) の回復過程における rms 誤差の変化の様子を表し

0.4	0.6	0.4
0.6	1.0	0.6
0.4	0.6	0.4

Fig. 6. Marginal point spread function (3×3). Original images are degraded with the psf shown in Fig. 3 in the central 4×4 part, and with the psf shown in Fig. 6 in the other part.

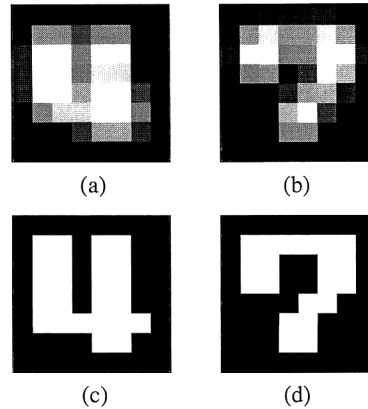


Fig. 7. Image reconstruction on simulation of blurred images degraded with shift variant psf. (a) Degraded image of original image 1, (b) degraded image of original image 2. (c), (d) Reconstructed images of Fig. 7 (a), (b), respectively.

ている。どちらも反復回数 60 回付近で最小になり、ほぼ 4~6%まで減少していることがわかる。“原画像 1”と“原画像 2”以外の他の画像についても Fig. 5 と同様の結果が得られている。復元された画像行列のランクは 64, 劣化行列のランクは 54 であり、そのどちらもそれぞれの特異値のうち 37 個は 10^{-1} 以上のオーダーで、残りは $10^{-5} \sim 10^{-7}$ 以下のオーダーであった。

次に psf がシフトバリエントである場合として、画面内で 2 種類の psf をもつ場合を想定してシミュレーションを行った。画面中央の 4×4 の範囲での psf は、シフトインバリエントな場合と同様に Fig. 3 の psf であり、残りの部分の psf は Fig. 6 に示されているものである。このような psf によりシフトバリエントな劣化を与えた像を Fig. 7(a)と(b)に示す。このときの回復結果が Fig. 7(c)と(d)であり、rms 誤差が Fig. 8 に示すものである。Fig. 8 で、実線が“原画像 1”の劣化像 (Fig. 7(a)), 破線が“原画像 2”の劣化像 (Fig. 7(b)) の回復

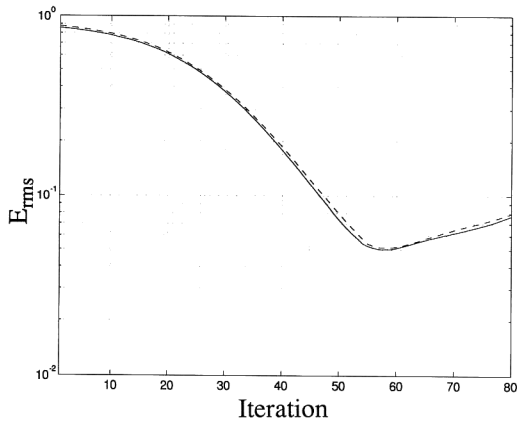


Fig. 8. Root mean square error E_{rms} vs. Iteration count for the case of shift variant psf shown in Fig. 4 and Fig. 6. Solid line: original image 1, and dashed line: original image 2.

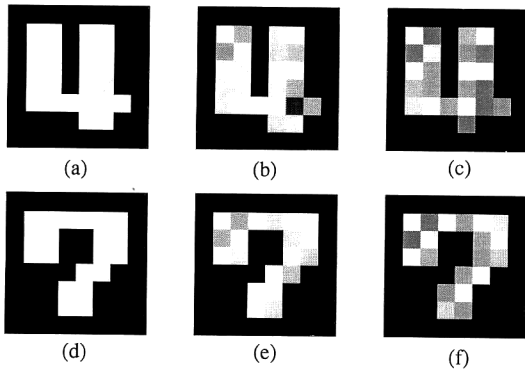


Fig. 9. Image reconstruction on simulation with additive noise when the psf is shift variant. (a), (b), (c), Reconstructed images of original image 1, with additive noise (a) 1%, (b) 3%, (c) 5%, respectively. (d), (e), (f) Reconstructed images of original image 2, with additive noise (d) 1%, (e) 3%, (f) 5%, respectively.

過程における rms 誤差の変化の様子を表している。初期予想、拘束条件はシフトインバリエントの場合と同じものである。これらの結果を見ると、シフトインバリエントである場合 (Fig. 4(c), (d)) と同じように、Fig. 2(a), (b)の原画像がほぼ完全に復元されており (Fig. 7(c), (d)), rms 誤差 (Fig. 8) も原復回数 60 回付近で最小になり、ほぼ 4~6%まで減少している。これらの結果からわかるように、今回提案した MIM が psf がシフトインバリエントとシフトバリエントのどちらの場合でも、劣化像の回復に有効であることがわかる。

MIM に対するノイズの影響を調べるために、シフトバリエントな場合についてノイズを加えた劣化像の回復

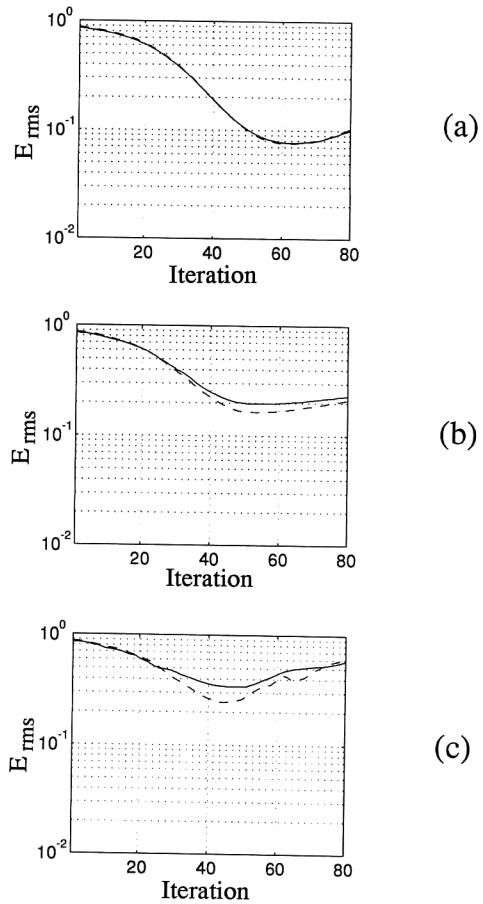


Fig. 10. Root mean square error E_{rms} vs. Iteration count for simulation with additive noise when the psf is shift variant. Additive noise (a) 1%, (b) 3%, (c) 5%, respectively. Solid line: original image 1, and dashed line: original image 2.

を行った。“原画像1”、“原画像2”についての回復結果を取り出したものを Fig. 9 に示す。Fig. 9(a), (b), (c) が“原画像1”の劣化像 (Fig. 7(a)) にそれぞれノイズを 1.0%, 3.0%, 5.0% 加えた場合の回復結果であり、Fig. 9(d), (e), (f) が“原画像2”の劣化像 (Fig. 7(b)) にそれぞれノイズを 1.0%, 3.0%, 5.0% 加えた場合の回復結果である。このときの rms 誤差を Fig. 10 に示す。Fig. 10(a) がノイズ 1.0%, (b) がノイズ 3.0%, (c) がノイズ 5.0% を加えた場合で、実線が“原画像1”の劣化像 (Fig. 7(a)), 破線が“原画像2”の劣化像 (Fig. 7(b)) の rms 誤差の変化の様子である。これらの結果をみると、ノイズが 1.0% までは、rms 誤差 (Fig. 10(a)) が反復回数が 60 回付近で最小で、ほぼ 8% に減少しており、実際の回復結果 (Fig. 9(a),

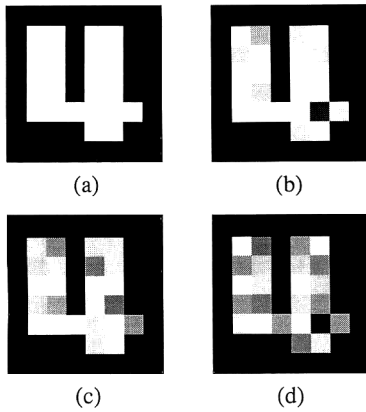


Fig. 11. Image reconstruction on simulation with 48 blurred images degraded with shift variant psf. (a)–(d) Reconstructed images of original image 1, (a) without additive noise, (b) noise 1%, (c) noise 3%, (d) noise 5%, respectively.

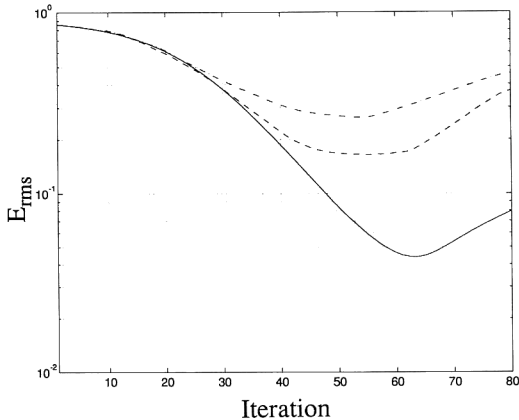


Fig. 12. Root mean square error E_{rms} vs. Iteration count for simulation with 48 degraded images when the psf is shift variant. Solid line: without additive noise, dashed line: noise 3%, and dash and dot line: noise 5%, respectively.

(d) をみても、Fig. 2(a), (b)の原画像がほぼ復元されていることがわかる。ノイズが5.0%になると、ノイズが回復結果にかなり影響を与えており (Fig. 9(c), (f)), rms 誤差 (Fig. 10(c)) も回復回数 40~45 回付近で最小になるが、30%程度までしか減少していない。しかし、一応原画像が識別できる程度には復元されている。また、ノイズが多くなると、各原画像により回復程度がばらつき、例えば Fig. 10(b)では“原画像2”のほうが“原画像1”よりも回復の程度が良い。

このアルゴリズムでは行列の疑似逆行列を求めており、行列が必ずしも正則である必要はないので、上で述

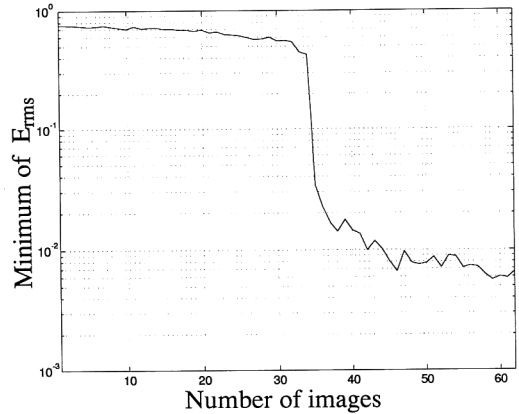


Fig. 13. Minimum of root mean square error E_{rms} vs. Number of blurred images degraded with shift variant psf.

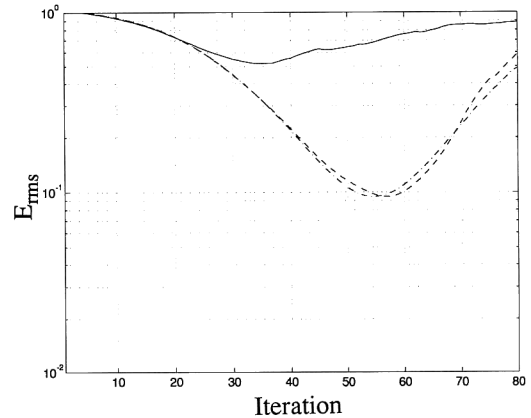


Fig. 14. Root mean square error vs. Iteration count with shift variant psf. Solid line, dashed line, and dash and dot line represent errors for the case of 35, 36 and 37 degraded images, respectively. All combination of the given number of degraded images are examined to find the minimal values of E_{rms} .

べたシミュレーションで64種類用意した原画像の枚数を減らすことができる。このことを確かめるために、原画像の枚数を減らしてシミュレーションを行った。劣化像を16枚減らした場合の回復結果を Fig. 11 に示す。この場合の原画像行列 F のランクは48であり、その特異値のうち37個は 10^{-1} 以上のオーダーで残りは 10^{-6} 以下のオーダーであった。初期予想の画像行列のランクは48であった。psfはシフトバリエーションであり、“原画像1”についての回復結果を示してある。Fig. 11(a)がノイズを加えずにシミュレーションを行った結果で、(b), (c), (d)がそれぞれノイズを1%, 3%, 5%加え

た場合の回復結果である。このときの rms 誤差を Fig. 12 に示す。実線がノイズを加えない場合で、破線がノイズ 3%、鎖線がノイズ 5% の場合の rms 誤差の変化の様子である。これらの結果を劣化像を 64 枚用いた場合の結果 (Fig. 7~Fig. 10) と比較すると、ほぼ同じ結果が得られていることがわかる。復元された画像行列のランクは 48, 劣化行列のランクは 54 であり、そのどちらもそれぞれの特異値のうち 37 個は 10^{-1} 以上のオーダーで、残りは 10^{-5} ~ 10^{-7} 以下のオーダーであった。

さらに劣化像の枚数を減らしていった場合の、像の枚数に対する rms 誤差の最小値の変化の様子を Fig. 13 に示す。このときノイズは加えていない。劣化像の枚数は 36 枚まで減らせたが、それより少なくなると急に回復が悪くなっている。その付近での rms 誤差の変化の様子を Fig. 14 に示す。劣化像の枚数は、実線が 35 枚、破線が 36 枚、鎖線が 37 枚である。36 枚までは、エラーの値は 10% と多少大きくなっているが、64 枚のときと同様に反復回数 60 回付近で最小となっている。35 枚になると、反復回数 35 回付近で最小となるが、50% 程度にしか下がっていない。

4. ま と め

今回われわれは、シフトバリエーション劣化像に適用可能な新しいブラインド・デコンボリューション・アルゴリズムを提案し、その有効性を計算機シミュレーションにより確認した。従来の AD アルゴリズムを拡張したこのアルゴリズムは、画像の劣化モデルを行列で表し、逆行列を用いて反復を行う反復型アルゴリズムであり、実行するにあたって複数枚の原画像を要する。行列の特異値分解をアルゴリズムに組み込むことで、画像の枚数ある程度減らすことができた。

本研究の一部は早稲田大学特定課題研究 (97 A-311) の援助により行われた。本研究に関して有益な助言を頂いた服部雅之氏に感謝します。

文 献

- 1) G. R. Ayers and J. C. Dainty: "Iterative blind deconvolution method and its application," *Opt. Lett.*, **13** (1988) 547-549.
- 2) C. I. Podilchuk and R. J. Mammone: "Image recovery by convex projection using a least-squares constraint," *J. Opt. Soc. Am. A*, **7** (1990) 517-521.
- 3) Gilbert Strang 著, 井上 昭訳: 線形代数とその応用 (産業図書株式会社, 東京, 1978).
- 4) W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling 著, 丹慶勝市, 奥村晴彦他訳: *Numerical Recipes in C* (日本語版) (技術評論社, 東京, 1993) pp. 73-84.