

量子カオスと光学現象

原 山 韶 久

決定論的な運動法則に支配されているにもかかわらず、系の非線形性によって長時間の振舞いが予測不可能となってしまうカオスと呼ばれる現象は、物理学、化学、経済学など様々な分野で発見され、基礎から応用まで幅広く研究されている^{1,2)}。カオスの統一的な定義はないが、一般には初期条件に対する鋭敏性や稠密な不安定周期軌道といった古典力学系の言葉を用いて語られる。つまり、カオスは古典力学系の概念である。一方、運動法則が線形なシュレーディンガー方程式で記述される量子力学では、古典力学の場合と同じ意味でのカオス現象が生じることはあり得ない。しかし、古典力学と量子力学は密接に関係しているので、古典力学系のカオスは量子現象に影響を及ぼすことがある。古典力学は天体の運動に代表されるようなマクロな世界に関する理論である。これに対して原子分子といったミクロの世界を説明するのが量子力学である。2つの力学理論によって同一のものを記述するならば、エネルギーが十分に大きいとき、同じ結果を与えるなければならない。したがって、古典力学の概念であるカオスも十分大きなエネルギーにおいては量子現象の中に顔を出すと期待される。このような観点から始まった量子カオスの研究が、古典力学系のカオスの量子現象に及ぼす影響として数値計算や実験により発見した成果は枚挙に暇がない。それらの網羅的な解説は他に多くあるのでそれらを参照していただくとして³⁾、本小論では光学現象に現れる量子カオスを中心に議論する（ここでいう光学現象とはマクスウェル方程式による記述に従う古典電磁場の現象のことであり量子

光学による現象ではない）。

まず、幾何光学と波動光学の関係は古典力学と波動力学の関係と大変よく似ており、光学現象に対して量子カオスが自然と関係してくることに注意しよう。光の波長がきわめて短いときには幾何光学で扱ってよい。その場合、鏡による反射は古典力学的粒子の剛体壁による反射と全く同じである。ところで、剛体壁ポテンシャル中の粒子の運動は、壁の形によって予測不可能となることが厳密に証明されている⁴⁾（図1）。そのような粒子の振舞いの研究は“撞球問題”と呼ばれ、典型的なカオス系として様々な角度から詳しく調べられている。したがって、光共振器での幾何光学には古典力学系のカオスが生じるわけである。さて、一方、光は波長の長短とは無関係に波動光学で扱えるはずであるから、幾何光学のカオスは波動光学現象に影響を及ぼすことが期待できる。光共振器の波動光学では、マクスウェル方程式から導出される波動方程式で時間依存性を落としてヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \lambda^2\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

を考える。これは剛体壁ポテンシャル中のシュレーディンガー方程式で時間依存性を落としてヘルムホルツ方程式を考えると全く同じである。したがって、光共振器における幾何光学のカオスの波動光学現象への影響とは、古典力学系としての撞球問題におけるカオスの量子現象への影響と等価である。このような観点から実際に光共振器の量子カオスを論じた研究⁵⁾について第1章で簡単に紹介しよう。

次に、波動光学現象と量子力学系の時間発展との関係を考えよう。ヘルムホルツ方程式で伝搬方向 z に対してparaxial近似を用いると、

ATR環境適応通信研究所(〒619-02 京都府相楽郡積善町光台2-2)
E-mail: harayama@acr.atr.co.jp

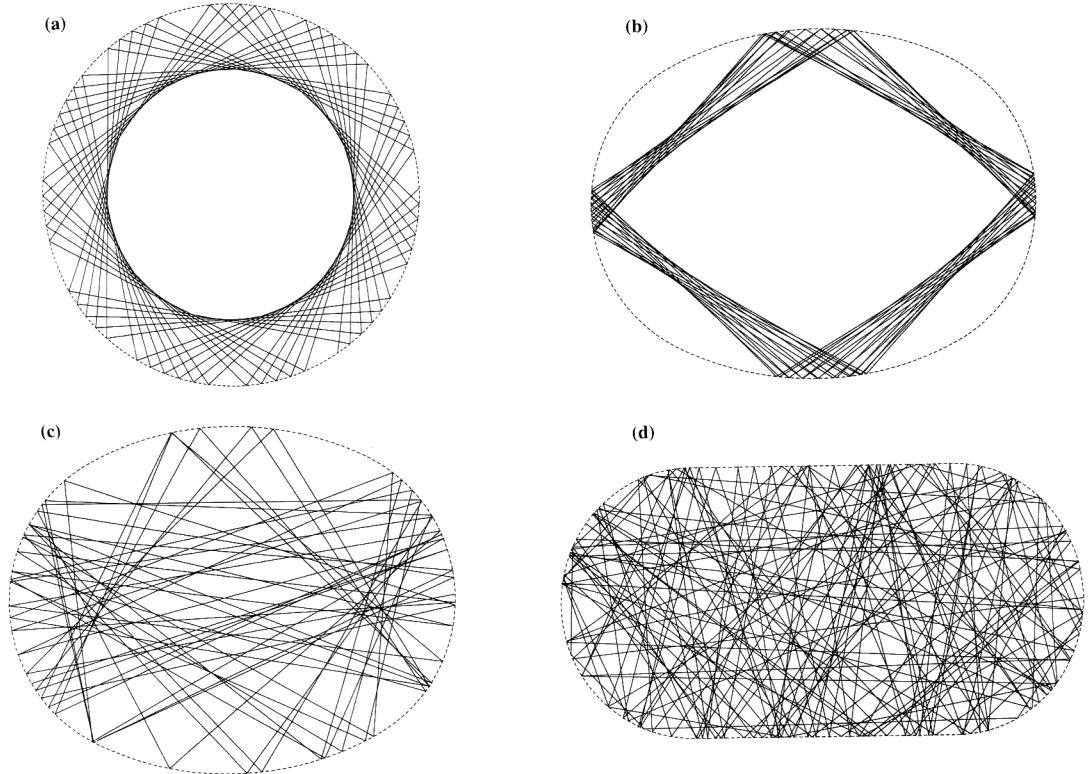


図1 ここでは筆者らの研究で用いている卵型撞球台²⁸⁾によって、予測可能な系、強いカオスの系およびそれらが混在した系の幾何光学（古典力学）について考察しよう。卵型撞球台の形状はあるパラメーターに依存して完全な円形からスタジアム形へと連続的に変化する。なお、この撞球台は Nöckel と Stone により研究された共振器⁵⁾とは変形の方法が多少異なる。(a) 完全な円の撞球台（予測可能な系—可積分系）、(b), (c) わずかに非対称な変形を受けた撞球台。(b) と(c)では初期条件が異なる、(d) スタジアム型撞球台（強いカオス系）。

$$i2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla_{x,y}^2 \varphi + V(x,y,z)\varphi \quad (2)$$

となる。ここで z を時間と考えれば式(2)はシュレーディンガー方程式と同じ形をしている。 $V(x,y,z)$ は例えば光ファイバーの局所的な屈折率と考えればよい。シュレーディンガー方程式として見た場合には、 $V(x,y,z)$ は量子力学的粒子に対するポテンシャルとなる。さらにそのようなポテンシャルの古典力学系を考えれば、ポテンシャルの選び方によってはカオスを示す。したがってこの系の波動光学現象を調べれば、古典力学系としてカオスを示すような系の時間発展に関する知見が得られることになる。これに関して第2章でより詳しく解説する。

他にも量子カオスとして知られていて光学現象として観測されるものは数多くある。中でも最も古く有名なものはスペクトルの最近接間隔分布である⁶⁾。これは、元来、複雑な相互作用の原子核の中性子の共鳴について調

べられていたものである。そのような系では詳しい構造も含めて厳密に扱うことはきわめて困難であるので、確率モデルを導入して説明するという方法がランダム行列理論として成功した⁷⁾。ところが、構造も含めて厳密にモデル化できる少数自由度カオス系でも数値計算や実験ではランダム行列理論の結果を再現する。例えば、幾何光学で考えたとき光線の軌道がカオスとなるような共振器のスペクトルを調べると、最近接間隔分布はウイグナー分布となる（図2(c)）。これはカオス系の波動光学現象における普遍則である⁸⁾。共振器が異なれば当然スペクトル自体は共振器ごとに異なるが、不思議なことに共振器が幾何光学でカオスを生み出すものであればそのスペクトルの間隔の分布は必ずウイグナー分布になるのである。これに対して、幾何光学で考えたとき規則的な軌道しか存在しないような矩形や円などの形状をしたカオスを生じない共振器では、スペクトルの最近接間隔分布は必ずポアソン分布になる（図2(a)）。スペクトルの統

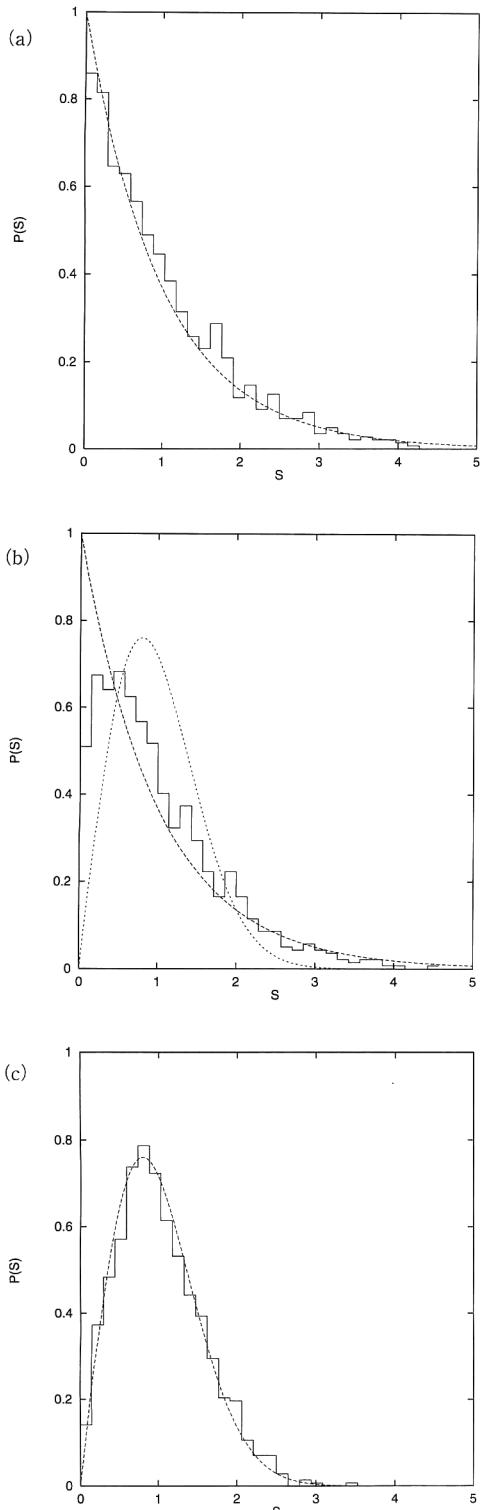


図2 量子卵型撞球台におけるエネルギーレベルの最近接間隔分布。(a) 完全な円の撞球台, (b) わずかに非対称な変形を受けた撞球台, (c) スタジアム型撞球台。

計についての研究では他にも様々な量に関する普遍則が知られている⁶⁾。

以上のように量子現象に対するカオスの効果は数値計算や実験では確認されているが、なぜそのようなことが起こるかという根本的な問いに対する完全な答えは実はまだ見つかっていない。そのためには、古典力学の世界の言葉を量子力学の世界の言葉に翻訳しなければならない。しかし、両者の関係は単純ではなく、2つの力学世界をつなぐことは容易ではない。それでもカオスを生じないような系の場合には量子古典対応は比較的よいので上述のスペクトルの最近接間隔分布に関する半古典論からのアプローチもある程度成功している⁹⁾。しかし、カオス系では量子と古典の相性の悪さが深刻な問題となってくる。Gutzwillerによって古典力学の情報だけを用いた形式的なカオス系の半古典量子化方法として周期軌道量子化法が与えられたが¹⁰⁾、残念なことにそれはそのまで実際に機能するものではなかった。というのは、すべての周期軌道を用いてすべての固有エネルギーを求める周期軌道量子化法を適用しようとすると、カオス系では周期が大きくなるに従い周期軌道の個数が指数関数的に大きくなるため、この半古典量子化公式が発散してしまうからである^{11,12)}。周期軌道量子化法は数論に現れるゼータ関数との類推のため Gutzwiller-Voros のゼータ関数の形で議論され¹³⁾、現在では量子カオス研究の中心的な話題のひとつとなっている³⁾。最近筆者らは境界要素法を Fredholm の積分方程式論により厳密に基礎付け、さらに Fredholm 行列式の半古典極限を考えることで、絶対収束の可能性をもつ半古典量子化公式を得た^{14,15)}。これについては第3章で紹介しよう。

1. 光共振器における量子カオス現象

最近、非対称な形状の誘電体の共振器における量子カオスに関する研究が Nature 誌に Nöckel と Stone によって報告されている⁵⁾。はじめに真円のシリンダーの誘電体共振器を想定し 2 次元系として考える。まず幾何光学で扱うとき真円における光線は常に一定の間隔で誘電体の境界で反射されるので、長時間後の光線の位置は初期条件から正確に予測できる(図 1(a))。このとき、対応する波動光学の現象として観測されるものは、光の強度分布が光線軌道の焦線の部分に局在する whispering gallery mode である(図 3(a))。これは微小球、微小円盤などにおける共鳴散乱やレーザー発振で光の閉じ込め効果として重要な役割を演じることが知られている^{16,17)}。次にシリンダーの形を楕円のように変形し、対

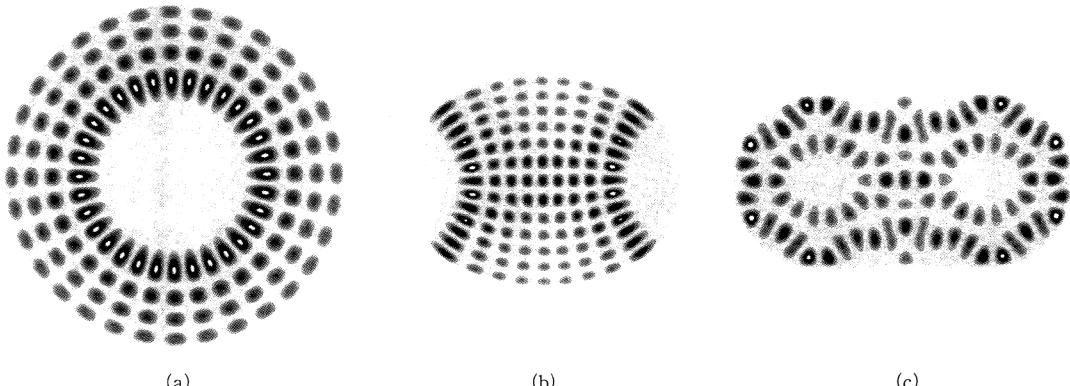


図3 卵型撞球台における波動関数の様子。(a) 完全な円の撞球台, (b) わずかに非対称な変形を受けた撞球台, (c) スタジアム型撞球台。

称性を壊した共振器を考える。変形がそれほど大きくな場合、近可積分ハミルトン系のカオスの研究でよく知られているように、光線の軌道は大別して3通りに分類される。それらは規則的な概周期軌道(図1(b)), 周期軌道、およびカオティックな軌道(図1(c))である。カオティックな軌道とは、誘電体の境界での反射ごとに不規則に散乱されるため長時間後の軌道が予測不可能となるようなものである。このような古典力学系のカオスを生み出す非対称な光共振器では、量子化されたカオス系に特徴的な振舞いが波動光学の現象として2つみられる。それらは、chaos-assisted tunneling^{18,19)}とdynamical localization²⁰⁾である。

まず、chaos-assisted tunnelingについて説明しよう。これは共振器の形状の非対称性が小さく、光線がほとんどの初期射出角度に対して規則的な軌道を描く場合に生じる現象である。幾何光学で考えたとき、真円のときとほぼ同じ軌道を描く規則的な光線となるような初期条件を与えると、誘電体の境界における入射角は臨界角を越えないので光線は外に出ることはできない。したがって、波動光学現象を考えると、エバネセントにより誘電体共振器の外に漏れるだけである。ところが、実際には真円ではないため規則的な軌道だけではなくカオス軌道が混在しているので、規則的な軌道となるような初期条件から出発してもエバネセントにより規則的な軌道から外れカオス軌道につながることができる。そのため、そこまで漏れ出せばその後は急激にいろいろな角度で壁に入射できるようになるので、エバネセントによる漏れはカオスがないときに比べて非常に強められる。これがchaos-assisted tunnelingである。

次に、dynamical localizationについて説明しよう。

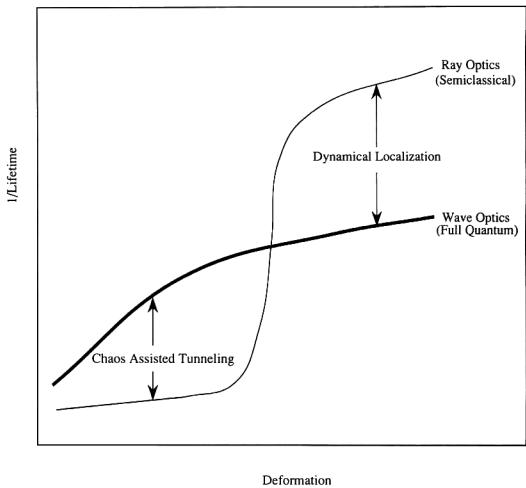


図4 カオスの波動光学現象に対する効果。

共振器の形状の非対称な変形が十分に大きくなると、ほとんどの初期条件がカオスの軌道となってしまうため、誘電体の境界での比較的少ない回数の反射ですぐに臨界角を超えてしまう。それゆえ、幾何光学で考えると、共振器の中に光はほとんど閉じ込められないと予想される。ところが、波動光学で扱った場合には幾何光学による予想以上に光を閉じ込めることができる。このような量子化されたカオス系の時間発展における局在現象は、不規則系におけるAnderson localizationと対比され、dynamical localizationと呼ばれている。これらの効果を図4に模式的に表した。

2. 光学系とキック系

ここでは、シュレーディンガー方程式についての時間

発展を調べることができる光学系の例を紹介するとともに、典型的なカオス系として研究されているキック系についても解説しよう。レンズを組み合わせた系や光ファイバーの系では、序節すでに示したように光の伝搬方向に対して paraxial 近似を用いれば、ヘルムホルツ方程式はシュレーディンガー方程式と同じ形になる。波動光学としては定常問題を扱っているが、伝搬方向を時間方向とみなせば時間に依存したシュレーディンガー方程式と考えてよい。このような類推の利点は、キック系と呼ばれるカオス系のプロトタイプの実験が実現できることである。キック系とは、デルタ関数型の周期外力により駆動されるもので、カオスを生じる最も単純な系として広く研究されている。時刻 t が 0 から T の間のとき、ハミルトンアン

$$H(p, q, t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}V(q), & (0 \leq t \leq \mu T) \\ \frac{1}{1-\mu} \frac{1}{2m} p^2, & (\mu T \leq t < T) \end{cases} \quad (3)$$

とする。 μ が非常に小さいとき、式(3)は衝突によるポテンシャルのみで駆動される運動と運動エネルギーのみの運動とが交互に行われることを示している。周期 T でこのハミルトンアンによる運動が繰り返されるような系をキック系という。この系を古典力学系として扱う場合、 $t=iT$ から $t=(i+1)T$ までハミルトン方程式を解くことができ ($i=0, 1, 2, \dots$)，

$$\begin{cases} p_{i+1} = p_i - TV'(q_i) \\ q_{i+1} = q_i - \frac{T}{m}p_{i+1} \end{cases} \quad (4)$$

となる。量子力学系として考えるときには、 $t=iT$ から $t=(i+1)T$ までシュレーディンガー方程式を解くことにより、1ステップのプロパゲーター \hat{U} は

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{2m\hbar} \vec{p}^2 T\right) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} V(\vec{q}) T\right\} \quad (5)$$

となる。これはレンズ系あるいは局所的な屈折率の変化を周期的に配列した光ファイバー系を波動光学で扱い paraxial 近似を適用した場合に得られるプロパゲーターと同じ形をしている。したがって、そのような系ではキック系の実験が可能である。

保存力学系のカオス研究においてキック系は大変詳しく調べられ非常に重要な役割を演じてきた²¹⁾。それは次のような理由による。非線形系ではほとんどすべてカオス現象を生じるので、個々の系に特有な振舞いを調べていては、カオスの性質というよりもその系のみについての知見が得られるだけである。したがって、それぞれの系の個性ではなく、それらに共通する性質、すなわち、

カオス系の普遍則に注目するという統計物理学的な視点からの捉え方がカオスの研究では大変有効となる。そこで、キック系でも惑星系でも共通に起こるような現象に注目し、それを解明するという戦略を用いるわけである。このような立場から考えると、キック系は保存系としての条件を満足し、時間発展を数値的に正確に計算でき、しかもカオスを生じるので、保存系のカオスの研究に最も適している。実際、キック系の研究を通じてこれまでに古典力学系と量子力学系のどちらにおいても多くの普遍則が発見されている^{3,21)}。しかし、実際の実験でキック系を実現することは難しく、理論あるいは数値的な研究が多い。上述の類推から、レンズや光ファイバーを用いて局所的で急激な屈折率の変化を周期的に配列することでキック系の実験が可能となることがわかる^{22,23)}。

3. カオスの半古典量子化と周期軌道理論

未来が正確に予測できるような多自由度系の半古典量子化として、Bohr-Sommerfeld の量子化条件を拡張した EBK 量子化法が知られている²⁴⁾。スペクトルの統計に関してはこの方法によってボアソン分布をある程度説明できる⁹⁾。しかし、EBK 量子化法をカオス系に適用することはできない。それは、EBK 量子化法で前提となる自由度の数だけの保存量がカオス系には存在しないからである。カオス系では、以下に示す Gutzwiller-Voros のゼータ関数のゼロ点によって半古典的なエネルギー固有値が与えられる¹³⁾。ここでは撞球問題を考えよう。ヘルムホルツ方程式(1)で $\lambda^2 = 2mE/\hbar^2$ とおく。ここで m は粒子の質量である。このとき Gutzwiller-Voros のゼータ関数は、

$$\xi(E) = \prod_p \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_p - \left(k + \frac{1}{2} \right) \lambda_p l_p + k_p \pi i \right] \right\} \quad (6)$$

となる。ここで p は素周期軌道を表す。 l_p 、 λ_p はそれぞれ素周期軌道 p の長さ、安定性指数である。また、 k_p は素周期軌道 p が反射を含まない双曲型であるとき 0 で、反射を含む双曲型であるとき k となる。ここで作用 S_p を

$$S_p = \sqrt{2mE} l_p + \left(\Theta_p N_p - \frac{\sigma_p}{2} \right) \pi \hbar \quad (7)$$

で定義した。 σ_p と N_p は自己共役点の個数と壁での衝突回数である。 Θ_p は衝突点での境界条件がディリクレ条件のとき 1 で、ノイマン条件のとき 0 である。式(6)において、積はすべての素周期軌道についてとる。つま

り、すべての周期軌道の情報によってすべてのエネルギー一固有値を決定するわけである。それゆえ、この半古典量子化法は周期軌道量子化法とも呼ばれている。この方法を用いるとき、カオス系では周期の長さとともに周期軌道の個数が指数関数的に増大しオイラー積が収束しないという困難が生じる。周期軌道量子化法をさらに実用可能なものとして完成させることができ、カオス系の半古典量子化および量子カオス理論の第一歩として最も重要である。そのために式(6)の発散級数を並び換える総和法によって収束させようという様々な試みがなされており、量子カオス研究の中心的な話題のひとつとなっている³⁾。最近、筆者らは Fredholm の積分方程式論を援用することにより cycle expansion という総和法を基礎づけた¹⁵⁾。それを簡単に紹介しよう。

オイラーの恒等式を用いてゼータ関数を級数に書き換え、以下のような部分和を考える。

$$\tilde{D}^{\text{sc}}_n(E) \equiv \sum_{\substack{\text{C.O.} \\ m_p N_p = n}} \prod_p \left[\frac{(-1)^{k_p} \exp \left\{ -\frac{1}{4} m_p (m_p - 1) \lambda_p l_p \right\}}{\prod m_p \sqrt{|\text{tr } M^{j_p} - 2|}} \right] \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} m_p S_p \right) \quad (8)$$

これは周期軌道の組み合わせのうち、壁との衝突回数が同じものを集めるということである。ここで C. O. は周期軌道の組み合わせを表し、 m_p はその組み合わせにおいて素周期軌道 p が繰り返される回数を示す。また、 M_p は素周期軌道 p の近傍で線形化されたポアンカレ写像である。 k_p は素周期軌道 p が反射を含まない双曲型であるとき m_p に等しく、反射を含む双曲型であるとき $(m_p + 1)/2$ の整数部分である。これを用いてゼータ関数を表すと

$$\zeta(E) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}^{\text{sc}}_n(E) \quad (9)$$

となる。ところで部分和 $\tilde{D}^{\text{sc}}_n(E)$ は、境界要素法で現れる Fredholm 行列式 $\tilde{D}(E)$ を定義する絶対収束級数の数列 $\tilde{D}_n(E)$ の半古典極限である。したがって、半古典近似²⁵⁾ が絶対収束性に影響しなければ総衝突回数でまとめた部分和をとることでゼータ関数の発散の問題を回避できるのである。

ところで、境界要素法に現れる Fredholm 行列式のゼロ点はエネルギー一固有値と共に共鳴散乱を与える¹⁴⁾。Fredholm 行列式と Gutzwiller-Voros のゼータ関数の関係が明らかになったことから、収束因子も含めて明確な半古典量子化および共鳴散乱に関する公式を導くことができる。まず、 $\tilde{D}(E)$ は 2 つの項

$$d_{\text{int}}(E) = \exp \left(i \frac{mA}{2\hbar^2} E \right) \left(\frac{ml^2 E}{2\hbar^2} \right)^{-\frac{mA}{2\pi\hbar^2 E}} \times \exp \left(-\frac{mA}{\pi\hbar^2} \gamma' E \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{E}{E_n} \right) \exp \left(\frac{E}{E_n} \right) \quad (10)$$

と

$$d_{\text{ext}}(E) = \exp \left\{ E \int_0^{\infty} \frac{dE'}{2\pi} \frac{1}{E - E' + i0} \times \left(\frac{mA}{\hbar^2} - \frac{2}{E'} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m(E') \right) \right\} \quad (11)$$

の積であることに注意する¹⁴⁾。ここで E_n は内部ディリクレ問題の固有エネルギーであり、 A と l は撞球台の面積と周長であり、 γ' は撞球台の形状で決まる実定数である。したがって、 $d_{\text{int}}(E)$ のゼロ点はすべての固有エネルギーに限られる。また、 $\delta_m(E)$ はノイマン条件下での散乱問題の位相のずれである。 $d_{\text{ext}}(E)$ は第 1 リーマン面ではゼロ点をもたず、第 2 リーマン面への解析接続は

$$d^{\text{II}}_{\text{ext}}(E) = \exp \left(-i \frac{mA}{\hbar^2} E \right) \frac{d_{\text{ext}}(E)}{\det \hat{S}^{\text{II}}_N(E)} \quad (12)$$

となる。ここで $\hat{S}^{\text{II}}_N(E)$ は定エネルギー面上での S 行列の第 2 リーマン面への解析接続である。式(12)より $d^{\text{II}}_{\text{ext}}(E)$ のゼロ点はすべての共鳴エネルギーに限られることがわかる。

d_{int} と d_{ext} の半古典極限 $d^{\text{sc}}_{\text{int}}$ と $d^{\text{sc}}_{\text{ext}}$ は、それぞれ撞球台の内側の周期軌道と外側の周期軌道の寄与からなるゼータ関数となる。それらは、上述のように総衝突回数によってまとめて部分和をとるという総和法により絶対収束させることができると考えられる。したがって、 $d^{\text{sc}}_{\text{int}}$ と $d^{\text{sc}}_{\text{ext}}$ はカオス系の半古典量子化と共に共鳴散乱に関する公式となり、古典力学系の情報のみによって量子現象を解析する基礎を与える。

光学との接点に注意しながら量子カオスについて紹介したが、量子カオスは光学に限らず大変広範な分野と関係していることを指摘しておこう。

まず工学応用として最近研究されているのがメゾスコピック半導体デバイスの量子カオスである²⁶⁾。半導体の微細加工技術の進歩により電子の平均自由行程以下のスケールのデバイスを作製することが可能である。このような素子では電子の運動はパリスティックで接合界面でのみ散乱されると考えられる。このとき、電子の振舞いは接合界面の形にのみ依存し撞球問題となるわけである。実際、古典力学系のカオスを生じる形状の撞球台の微小デバイスについて実験が行われており、カオスのも

つ複雑で豊かな応答特性を利用したデバイス開発が期待されている。

一方、基礎的な面では、カオスの半古典理論で現れた Gutzwiller-Voros のゼータ関数と、数論において有名なリーマンのゼータ関数との非常に高い類似性に注目した研究も展開されている²⁷⁾。量子カオスで発見されたレベル統計に関する普遍則がリーマンのゼータ関数のゼロ点についても成立することや、リーマンのゼータ関数についての総和法を Gutzwiller-Voros のゼータ関数に適用することなど、数学理論としても研究されている。また、時間発展に関する半古典理論も重要な基礎的課題であり精力的に研究されている。

他にも量子カオスは化学反応理論や磁場中の超格子井戸など様々な分野で研究されており、ますます学際的な広がりを見せている。これからも基礎物理学の重要課題として半古典理論を中心に発展し、同時に光学や半導体などのデバイス応用への実現に力が注がれると期待される。

最後に、本解説は奈良女子大学の田崎秀一氏と都立大学の首藤啓氏との共同研究の結果と、早稲田大学の相沢洋二氏と牧野浩典氏との共同研究の結果を含むことを付記するとともに謝意を表したい。

文 献

- 1) 合原一幸編：カオス－カオス理論の基礎と応用（サイエンス社, 1990）。
- 2) 合原一幸編：応用カオス（サイエンス社, 1994）。
- 3) *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches Summer School, eds. M.-J. Giannoni, A. Voros and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1991); *Quantum and Chaos: How Incompatible?*, ed. K. Ikeda, Prog. Theor. Phys. Suppl., **116** (1994); 数理科学, **376** (サイエンス社, 1994)。
- 4) *Dynamical Systems II*, ed. Ya. G. Sinai (Springer, Berlin, 1989)。
- 5) J. U. Nöckel and A. D. Stone: "Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities," *Nature*, **385** (1997) 45-47.
- 6) 長谷川洋：量子系の準位統計、物理学最前線 **28** (共立出版, 1991)。
- 7) M. L. Mehta: *Random Matrices* (Academic Press, London, 1991)。
- 8) O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit: "Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws," *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 1-4.
- 9) M. V. Berry and M. Tabor: "Level clustering in the regular spectrum," *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **356** (1977) 375-394.
- 10) M. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1990).
- 11) B. Eckhardt and E. Aurell: "Convergence of the semiclassical periodic orbit expansion," *Europhys. Lett.*, **9** (1989) 509-512.
- 12) T. Harayama and A. Shudo: "Periodic orbits and semiclassical quantization of dispersing billiards," *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992) 4595-4611.
- 13) A. Voros: "Unstable periodic orbits and semiclassical quantisation," *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21** (1988) 685-692.
- 14) S. Tasaki, T. Harayama and A. Shudo: "Interior Dirichlet eigenvalue problem, exterior Neumann scattering problem, and boundary element method for quantum billiards," *Phys. Rev. E*, **56** (1997) R13-R16.
- 15) T. Harayama, A. Shudo and S. Tasaki: "Resummation of the Gutzwiller-Voros zeta function for semiclassical quantization and resonance scattering in strongly chaotic systems," (preprint).
- 16) 五神 真, 竹田研爾：“微小球レーザー”，オプトロニクス, **136** (1993) 63-67.
- 17) S. L. McCall, A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. J. Pearton and R. A. Logan: "Whispering-gallery mode microdisk lasers," *Appl. Phys. Lett.*, **60** (1992) 289-291.
- 18) O. Bohigas, D. Boosé, R. Egydio de Carvalho and V. Marvulle: "Quantum tunneling and chaotic dynamics," *Nucl. Phys. A*, **560** (1993) 197-210.
- 19) A. Shudo and K. S. Ikeda: "Complex classical trajectories and chaotic tunneling," *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 682-685.
- 20) G. Casati, B. V. Chirikov, I. Guarneri and D. L. Shepelyansky: "Dynamical stability of quantum "chaotic" motion in a hydrogen atom," *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 2437-2440.
- 21) R. S. Mackay and J. D. Meiss: *Hamiltonian Dynamical Systems* (Adam Hilger, Bristol, 1987).
- 22) J. Krug: "Optical analog of a kicked quantum oscillator," *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 2133.
- 23) R. E. Prange and S. Fishman: "Experimental realizations of kicked quantum chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 704-707.
- 24) V. P. Maslov and N. V. Fedoriuk: *Semiclassical Approximations in Quantum Mechanics* (Reidel, Dordrecht, 1981).
- 25) M. V. Berry and K. E. Mount: "Semiclassical approximations in wave mechanics," *Rep. Prog. Phys.*, **35** (1972) 315-397.
- 26) C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins and A. C. Gossard: "Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures," *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 506-509.
- 27) J. P. Keating: "The semiclassical sum rule and Riemann's zeta function," *Quantum Chaos*, eds. H. A. Cerdeira, R. Ramaswamy, M. C. Gutzwiller and G. Casati (World Scientific, Singapore, 1991) pp. 280-294.
- 28) G. Benettin and J. M. Strelcyn: "Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy," *Phys. Rev. A*, **17** (1978) 773-785.

(1997年7月15日受理)