

## 現代ラジオメトリーの基礎

吉 森 久

ラジオメトリーは、19世紀の測光学を起源とする長い歴史をもった光学の一分野であり、天文学における恒星大気や地球大気中の放射エネルギー伝搬の問題に適用されて、大きな成功を収めてきた。また、1940～50年代には、Chandrasekharが多重散乱を考慮した形の輸送方程式（放射伝達方程式）をまとめている<sup>1)</sup>が、一方では幾何光学的光線に沿って運ばれる放射エネルギーという現象論的概念を扱う閉じた実用理論として、波動光学や電磁気学と基礎的な関連をもつこともなく長い間放置されてきた。この間、ラジオメトリーが波動理論から借用したものは、それがインコヒーレントな光の場の波長がゼロの極限で成立する光のエネルギー伝搬則を表すという解釈であった。

この状況は、1968年のWaltherの先駆的研究<sup>2)</sup>をきっかけとする諸研究者の一連の研究により大きく変化した。この統計光学の進歩は、ランダムな波動の統計的性質としてのラジオメトリーの諸概念に光をあてたのである。すなわち、ラジオメトリーの現象論的諸量をコヒーレンス理論の諸概念によって再定義する研究が進められた。一般化された放射輝度の様々な定義が提案され<sup>2-6)</sup>、その伝搬特性が調べられた。また、一般化された放射輝度と量子統計力学の位相空間分布関数との類似性が認識され、一般化放射輝度の特異な振舞いの背景が明らかとなった<sup>6,9)</sup>。これら一連の研究はコヒーレンス理論自体の発展も促し、スペクトル領域のコヒーレンス理論が体系化された。そして、種々の部分コヒーレント光源モデルが考案され、その放射特性が調べられた。

Wolf効果の発見もこの流れに含まれる。今日ではラジオメトリーとコヒーレンス理論は渾然一体として、現代統計光学の一分野を形成している。

現在この分野の概説は、Wolf<sup>7)</sup>やApresyanら<sup>8)</sup>のものがあり、文献9)にはFribergによる要約がある。また、このテーマを扱った教科書<sup>10-13)</sup>も出版されている。日本語の文献では、黒田<sup>14)</sup>や白井ら<sup>15)</sup>の解説がある。

古典的なラジオメトリーと現代的なラジオメトリーの関係は、古典力学と量子力学の関係に相当するものである。本稿では、単色場を対象にコヒーレンス関数の伝搬と古典的なラジオメトリー<sup>1)</sup>の概念からはじめて、現代的なラジオメトリーにおける放射輝度の定義にかかわる理論形式を概観する。散乱性媒質中の放射輝度の伝搬は、ここでは考えない。最後の節では最近の話題から、非定常場を含む一般の光の場に拡張された放射輝度の定義を紹介する。また、この放射輝度の定義が示唆する、干渉測定による放射輝度計測の定理にもふれる。

### 1. 単色場におけるコヒーレンス関数の伝搬

準備として単色場を対象としたコヒーレンス関数の伝搬問題を考えよう。コヒーレンス関数の伝搬を扱うポピュラーな方法は2つある。1つはフレネル・キルヒホッフの回折積分に基づいて実空間で伝搬を扱う方法であり、いま1つは伝搬方向に対し垂直にとった参照平面を考えて、コヒーレンス関数の伝搬を参照面内の波動の2次元フーリエ領域で扱う方法である。両者の違いは、波動の伝搬を球面波を単位として扱うか、平面波を単位として扱うかであり、数学的には同等である。ここでは後者を採用する。この方法は、Waltherが彼の研究<sup>2)</sup>で利用した角度スペクトルの考え方<sup>16)</sup>と基本的に同じであ

宇宙開発事業団地球観測データ解析研究センター (〒106 東京都港区六本木 1-9-9)  
E-mail: Yosimori@eorc.nasda.go.jp

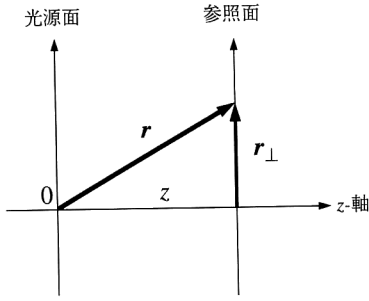


図1 座標系と記法.

り、放射輝度や放射強度の伝搬を扱う際に便利である。また、平行平面間のエネルギー伝搬を扱う伝統的なラジオメトリーの問題設定ともなじみがよい。

角周波数  $\omega$  をもち、自由空間を  $z$  の正の方向に進行している光の複素場  $U_\omega(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$  を考える。 $U_\omega(\mathbf{r})$  はヘルムホルツの方程式

$$(\nabla^2 + k^2)U_\omega(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

をみたしている。ここで  $k = \omega/c$  であり、 $c$  は光速である。図1のように  $z=0$  面上の光の場を2次光源とみなし、半空間  $0 < z$  における伝搬を考える。以下、 $z$  を参照面の位置を指定するパラメータと考えて、 $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z) = (\mathbf{r}_\perp, z)$  とかくことにする。単色場であるから、ある参照面  $z = \text{const.} \geq 0$  での光の干渉性を指定するコヒーレンス関数は相互スペクトル密度

$$W^{(2)}(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp; \omega) \equiv \langle U_\omega^*(\mathbf{r}'_\perp, z) U_\omega(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle \quad (2)$$

である。ここで、 $\langle \rangle$  は集団平均を、 $*$  は複素共役を表し、参照面の位置は上付の  $( )$  で記した。式(2)で  $\mathbf{r}_\perp$  と  $\mathbf{r}'_\perp$  を等しくとった  $W^{(2)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}_\perp; \omega) = \langle |U_\omega(\mathbf{r}_\perp, z)|^2 \rangle \equiv S(\mathbf{r}; \omega)$  は、点  $\mathbf{r}$  における光学的強度(スペクトル密度)である。

振幅と相互スペクトル密度の伝搬を調べるために、振幅  $U_\omega(\mathbf{r}) = U_\omega(\mathbf{r}_\perp, z)$  を  $\mathbf{r}_\perp$  に関するフーリエ積分でかいて<sup>6,17)</sup>

$$U_\omega(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2k_\perp}{2\pi} \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) \tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z) \quad (3)$$

と表す。ここで、 $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$  である。式(3)を(1)に代入するとフーリエ振幅  $\tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z)$  のみたす方程式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z) = 0 \quad (4)$$

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_\perp^2} & \text{if } k_\perp \leq k \\ i\sqrt{k_\perp^2 - k^2} & \text{if } k_\perp \geq k \end{cases} \quad (5)$$

がえられ、 $z$  の正の方向に進行する(4)の解は、 $z = z'$  なる参照面上のフーリエ振幅を  $\tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z')$  として<sup>17)</sup>

$$\tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z) = \exp[ik_z(z - z')] \tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z') \quad (6)$$

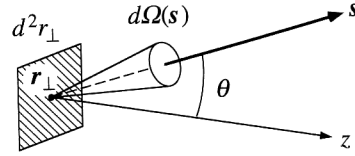


図2 放射輝度の概念.

とかかれる。式(6)はフーリエ振幅の伝搬則である。また、(5)から  $k_\perp > k$  の場合  $k_z$  は純虚数となるから、(6)は  $z$  の正の方向に進むに従って指数的に振幅が減少するエバネセント波となるが、ここではエバネセント波はないものとする。

次にある参照面上の光に対し、 $\mathbf{k}_\perp$  空間での相互スペクトル密度を(2)の4次元フーリエ変換によって

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega) \\ = \int \frac{d^2r'_\perp d^2r_\perp}{(2\pi)^2} \exp[-i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp - \mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp)] W^{(2)}(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp; \omega) \end{aligned} \quad (7)$$

と定義する<sup>6,16),\*1)</sup>。すると(3)を利用して

$$\tilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega) = \langle \tilde{U}_\omega^*(\mathbf{k}'_\perp, z) \tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z) \rangle \quad (8)$$

がえられる。これに(6)を代入すると  $\tilde{W}^{(2)}$  の伝搬則は<sup>6)</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega) \\ = \exp[i(k_z - k'_z)(z - z')] \tilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega) \end{aligned} \quad (9)$$

と表される。この伝搬則は、実空間での相互スペクトル密度(2)の伝搬則<sup>\*2)</sup>と比べるとときわめて簡単な形をしており、これが  $\mathbf{k}_\perp$  空間でコヒーレンス関数の伝搬を扱う利点である。特に、式(9)から  $\mathbf{k}_\perp$  空間における強度  $\langle |\tilde{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z)|^2 \rangle = \tilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega)$  は、 $z$  に依存せずすべての参照面で保存する。これは、無限遠方まで減衰せずに伝搬する平面波で光の場を展開したのであるから当然のことである。

## 2. 古典的なラジオメトリー概念

古典的なラジオメトリー<sup>1)</sup>で中心的な役割をはたす物理量は放射輝度である。単色光源の放射輝度  $B_{cl}^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}; \omega)$  は、光源  $z=0$  面上の点  $\mathbf{r}_\perp$  における微小面積  $d^2r_\perp = dx dy$  を通って単位ベクトル  $\mathbf{s}$  で指定される方位の微小立体角  $d\Omega(\mathbf{s})$  内に放射される単位時間あたりのエネルギー(分光放射束)  $d\Phi_\omega$  を用いて次のように定

\*1) 指数部の符号が、文献16)の定義とは異なることを注意する。文献6)の、相関演算子の  $\mathbf{k}_\perp$  表示と同じものである。

\*2) 文献10)のp.184, 式(4.4-15)を参照。

\*3) 文献1)の多色場の放射輝度の古典的定義と単色場のそれである式(10)の対応は、文献10)のp.292にある。

義される (図2)\*3.

$$d\Phi_\omega = s_z B_{cl}^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}; \omega) d^2 r_\perp d\Omega(\mathbf{s}) \quad (10)$$

ここで  $\mathbf{s}=(s_x, s_y, s_z)$ ,  $s_z=\cos\theta$  である. この放射輝度は幾何光学的光線  $\mathbf{s}$  の運ぶエネルギーと解釈される. したがって常に正であり, また有限の広がりをもった光源の場合, その外ではゼロとなることが物理的に要請される.

式(10)の放射輝度は本来  $\mathbf{s}_\perp=(s_x, s_y)$  の関数であるが,  $\mathbf{s}$  の関数として表しておくとしばしば都合がよい. 光源から放射される全放射束  $\Phi_\omega$  は, (10)を光源面と立体角  $2\pi$  に関し積分することにより

$$\Phi_\omega = \int d^2 r_\perp \int_{(2\pi)} d\Omega(\mathbf{s}) s_z B_{cl}^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}; \omega) \quad (11)$$

と表される. これを次のようにかきなおす.

$$\Phi_\omega = \int_{(2\pi)} d\Omega(\mathbf{s}) J_\omega(\mathbf{s}) = \int d^2 r_\perp E_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_\perp) \quad (12)$$

ここで  $J_\omega(\mathbf{s})$  と  $E_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_\perp)$  はそれぞれ

$$J_\omega(\mathbf{s}) = s_z \int d^2 r_\perp B_{cl}^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}; \omega) \quad (13)$$

$$E_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_\perp) = \int_{(2\pi)} d\Omega(\mathbf{s}) s_z B_{cl}^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}; \omega) \quad (14)$$

で定義される光源の放射強度と放射発散度である<sup>18)</sup>. 放射強度は光源から遠方界における  $\mathbf{s}$  方向の単位立体角に放射される放射束であり, 放射発散度は光源上の点  $\mathbf{r}_\perp$  から単位面積当たり  $2\pi$  なる立体角に放射される放射束である. 一方, ラジオメトリーの輸送方程式は真空中では次の形をとる\*4.

$$\frac{dB_{cl}(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega)}{ds} = 0 \quad (15)$$

つまり, 古典的な放射輝度は光線の方向  $\mathbf{s}$  にそって保存する.

### 3. 放射輝度のコヒーレンス関数による定義

放射輝度を光の場の量で定義することを考えよう. ここで問題は, 波動の干渉現象を扱うためには波長は有限でなくてはならないが, 放射輝度は位置と波数ベクトル  $\mathbf{k}=\mathbf{k}\mathbf{s}$  の関数であり, これらの変数の間に不確定性関係があるから同時に指定できないことである. この事情は, 量子統計力学で位置と運動量を直角座標とする位相空間の分布関数をどのように定義するかということと相似性がある<sup>5)</sup>. 量子統計力学の位相空間分布関数は様々な定義のしかたがあるが<sup>5,19,20)</sup>, なかでもウィグナー関

数<sup>21,22)</sup>は有名である. この関数の考え方は, 光学的情報処理の分野でも利用されている<sup>23-26)</sup>. そこで, ここでは光学で利用されるウィグナー関数から一般化された放射輝度を定義する方法<sup>6)</sup>を紹介しよう. ある参照面における光の場のウィグナー関数  $F_\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z)$  は,  $\mathbf{r}_\perp$  空間と  $\mathbf{k}_\perp$  空間における相互スペクトル密度(2), (7)から同等な2つの表現として次のように定義される<sup>5,6,23)</sup>.

$$\begin{aligned} F_\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z) &= \int d^2 \rho_\perp \exp(-i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_\perp) W^{(2)}(\mathbf{r}_\perp - \boldsymbol{\rho}_\perp/2, \mathbf{r}_\perp + \boldsymbol{\rho}_\perp/2; \omega) \\ &= \int d^2 q_\perp \exp(i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) \bar{W}^{(2)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp/2, \mathbf{k}_\perp + \mathbf{q}_\perp/2; \omega) \end{aligned} \quad (16)$$

$z$  をパラメーターにもつこの関数は常に実数であるが, 正の値だけでなく負の値をもとりうる. ウィグナー関数の有用性はその周辺密度にある. すなわち  $F_\omega$  を  $\mathbf{k}_\perp$  で積分すると

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} F_\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z) = W^{(2)}(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp; \omega) = \langle |U_\omega(\mathbf{r}_\perp, z)|^2 \rangle \quad (17)$$

となり, 点  $\mathbf{r}$  における光学的強度に一致する. ここで  $(2\pi)^2$  はウィグナー関数の正規化因子で, 4次元位相空間  $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp)$  における不確定セルの体積である. また  $\mathbf{r}_\perp$  で積分すると

$$\int \frac{d^2 r_\perp}{(2\pi)^2} F_\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z) = \bar{W}^{(2)}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega) = \langle |\bar{U}_\omega(\mathbf{k}_\perp, z)|^2 \rangle \quad (18)$$

となり,  $\mathbf{k}_\perp$  空間における強度に一致する. さらに(17)から,  $F_\omega$  を4次元位相空間全体で積分したものは, 参照面における全強度に一致することがわかる.

こういうわけで, ウィグナー関数(16)は, 正規化因子の存在と負になることがあることを除くと, ある参照面上の光の場の4次元位相空間における強度分布と解釈される. そこで光学的強度はポインティングベクトルの大きさに等しいから, エネルギー密度は光学的強度の  $c^{-1}$  倍であることに注意すると<sup>7,27)</sup>,  $[(2\pi)^2 c]^{-1} F_\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z) d^2 r_\perp d^2 k_\perp$  は位相空間上の点  $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp)$  のまわりの微小領域に含まれるエネルギーとみなせることがわかるだろう. したがって, 光源上の点  $\mathbf{r}_\perp$  から微小面積  $d^2 r_\perp$  を通って  $\mathbf{k}_\perp$  の方位へ流れる放射束は, このエネルギーに光速  $c$  と  $s_z$  をかけることにより

$$d\Phi_\omega = \frac{s_z}{(2\pi)^2} F_\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp; 0) d^2 r_\perp d^2 k_\perp \quad (19)$$

と表される. これを,  $d^2 k_\perp = k^2 d^2 s_\perp = s_z k^2 d\Omega(\mathbf{s})$  を利用

\*4 文献1)第1章, 式(46)を参照. 空間を伝搬する放射輝度の参照面は, 3次元座標  $\mathbf{r}$  の  $z$  成分で指定される. 光源上の放射輝度との対応は,  $B^{(0)}(x, y, \mathbf{s}; \omega) = B(x, y, 0, \mathbf{s}; \omega)$  である.

して(10)と比較すると、光源面における一般化された放射輝度の表現として

$$B^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}; \omega) = s_z \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 F_\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{k}_\perp; 0) \quad (20)$$

をうる。これから、ある参照面における一般化放射輝度は、 $z$  を有限の値におきかえて

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) &= s_z \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int d^2 \rho_\perp \exp(-i \mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_\perp) W^{(\pm)}(\mathbf{r}_\perp \\ &\quad - \boldsymbol{\rho}_\perp/2, \mathbf{r}_\perp + \boldsymbol{\rho}_\perp/2; \omega) \\ &= s_z \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int d^2 q_\perp \exp(-i \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) \tilde{W}^{(\pm)}(\mathbf{k}_\perp \\ &\quad - \mathbf{q}_\perp/2, \mathbf{k}_\perp + \mathbf{q}_\perp/2; \omega) \end{aligned} \quad (21)$$

と表される。式(20)、(21)は、Waltherの一般化放射輝度の第1の定義<sup>2)</sup>と一致している。このとき光源の放射強度(13)は、ウィグナー関数の性質(18)から

$$J_\omega(\mathbf{s}) = (s_z k)^2 \tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega) \quad (22)$$

となる。これは $\mathbf{k}_\perp$ 空間での相互スペクトル密度の伝搬則(9)によって、正確に遠方界における放射強度 $(s_z k)^2 \tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; \omega)$ に等しいことが結論される\*<sup>5</sup>。また放射発散度(14)は、(21)の第1の表式を代入して立体角の積分をおこなうと<sup>18)</sup>

$$\begin{aligned} E_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_\perp) &= \frac{k^2}{2\pi} \int d^2 \rho_\perp \frac{j_1(k\rho_\perp)}{k\rho_\perp} W^{(0)}(\mathbf{r}_\perp - \boldsymbol{\rho}_\perp/2, \mathbf{r}_\perp + \boldsymbol{\rho}_\perp/2; \omega) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで $\rho_\perp = |\boldsymbol{\rho}_\perp|$ であり、 $j_1$ は1次の第1種球面ベッセル関数である。

次に、一般化放射輝度(21)が、巨視的にみてインコヒーレントであるような部分コヒーレント光源に対し、真空中の輸送方程式(15)を近似的に満足することを調べよう。まず、(21)の第2の表式に伝搬則(9)を代入し $z'=0$ とおくと

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) &= s_z \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int d^2 q_\perp \exp[i \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + i(\kappa^{(+)} - \kappa^{(-)})z] \\ &\quad \times \tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp/2, \mathbf{k}_\perp + \mathbf{q}_\perp/2; \omega) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\kappa^{(\pm)} = \sqrt{k^2 - (\mathbf{k}_\perp \pm \mathbf{q}_\perp/2)^2} \quad (25)$$

がえられる。式(24)は、ある参照面上の一般化放射輝度を光源のもつコヒーレンス関数で表した公式である。次に、光源のコヒーレンス状態を、相互スペクトル密度で以下のように指定する。

$$W^{(0)}(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp; \omega) = S^{(0)}\left(\frac{\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}'_\perp}{2}; \omega\right) \mu^{(0)}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; \omega)$$

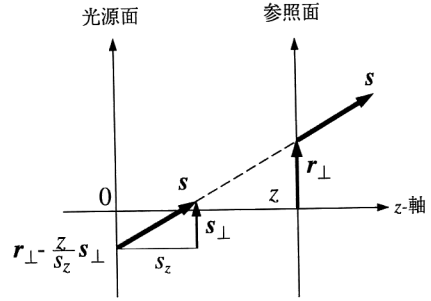


図3 放射輝度の伝搬。

ここで、 $S^{(0)}(\mathbf{r}_\perp; \omega)$ は点 $\mathbf{r}_\perp$ における光源のスペクトル密度であり、 $\mu^{(0)}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; \omega)$ は正規化した相互スペクトル密度(コヒーレンス度)である。いま、 $S^{(0)}(\mathbf{r}_\perp; \omega)$ の空間的変化のスケール $L$ が $\mu^{(0)}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; \omega)$ の空間的ひろがり、すなわち相関距離 $l$ に比べて十分大きいと仮定すると、光源は巨視的にはインコヒーレントと考えるてよい。このような光源を準均一光源<sup>28)</sup>という。準均一光源では、光の波長を $\lambda$ とすると一般に

$$\lambda \leq l \ll L \quad (27)$$

がみたまわっている。式(26)を利用すると、光源の一般化放射輝度(20)と $\mathbf{k}_\perp$ 空間の相互スペクトル密度(7)は

$$B^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}_\perp; \omega) = (2\pi)^{-1} s_z k^2 S^{(0)}(\mathbf{r}_\perp; \omega) \tilde{\mu}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp; \omega) \quad (28)$$

$$\tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{k}''_\perp; \omega) = \tilde{S}^{(0)}(\mathbf{k}'_\perp - \mathbf{k}''_\perp; \omega) \tilde{\mu}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{k}'_\perp + \mathbf{k}''_\perp}{2}; \omega\right) \quad (29)$$

と表される。ここで

$$\tilde{S}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp; \omega) = \int \frac{d^2 r_\perp}{2\pi} \exp(-i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) S^{(0)}(\mathbf{r}_\perp; \omega) \quad (30)$$

$$\tilde{\mu}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp; \omega) = \int \frac{d^2 r_\perp}{2\pi} \exp(-i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) \mu^{(0)}(\mathbf{r}_\perp; \omega) \quad (31)$$

は、それぞれ $S^{(0)}$ と $\mu^{(0)}$ の2次元フーリエ変換である。そこで、(24)に(29)を代入して $B$ を $\tilde{S}^{(0)}$ と $\tilde{\mu}^{(0)}$ で表すと

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) &= s_z \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \tilde{\mu}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp; \omega) \\ &\quad \times \int d^2 q_\perp \exp[i \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + i(\kappa^{(+)} - \kappa^{(-)})z] \tilde{S}^{(0)}(\mathbf{q}_\perp; \omega) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ところで、 $\tilde{S}^{(0)}(\mathbf{q}_\perp; \omega)$ の広がりは $2\pi/L$ の程度であり、 $\tilde{\mu}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp; \omega)$ の広がりは $2\pi/l$ の程度である。したがって、(27)からわかるように $\mathbf{k}_\perp$ と $\mathbf{q}_\perp$ の大きさ

\*<sup>5</sup> ここでは、第1節で考えた平面波の伝搬から遠方界における放射強度を評価した。これを球面波の伝搬で扱った文献10) p. 239と比較すると興味深い。

には,  $q_{\perp} \ll k_{\perp} \leq k$  の関係がある. そこで,  $\kappa^{(\pm)}$  を  $q_{\perp}=0$  のまわりにテイラー展開して  $q_{\perp}$  に関し 1 次の項までとり,  $q_{\perp}$  に関する積分を実行して (28) と比較すると, 光源の輝度と参照面の輝度の関係<sup>2,10,27,29)</sup>

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) = B^{(0)}\left(\mathbf{r}_{\perp} - \frac{z}{s_z} \mathbf{s}_{\perp}, \mathbf{s}; \omega\right) \quad (33)$$

がえられる. 式 (33) は, 一般化放射輝度が光線方向  $\mathbf{s}$  に沿って保存することを表しており, これが (15) をみたくことは明らかである (図 3).

一般化放射輝度は他にもいろいろな定義のしかたがあるが<sup>3-6)</sup>, (21) の一般化放射輝度は光線方向の保存性が比較的よいといわれている. しかも都合のよいことは, 近軸近似の範囲では, 準均一光源に限らなくても光線方向にそって保存する<sup>6)</sup>. 実際, (5) の  $k_z$  を  $k_{\perp}$  の 2 次の項までで<sup>6)</sup>

$$k_z \approx k - \frac{k_{\perp}^2}{2k} \quad (34)$$

と近似しておく, (24) から  $B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) \approx B^{(0)}(\mathbf{r}_{\perp} - z\mathbf{s}_{\perp}, \mathbf{s}; \omega)$  となるのが容易に導かれる. したがって, ガウス型シェルモデル光源<sup>30-32)</sup> のように (26) の型の相互スペクトル密度を有するが, 必ずしも  $l \ll L$  ではなく, ある場合は空間的にコヒーレントな  $l \approx L$  なる条件で利用されるモデルでも, 多くの場合 (21) を利用することができる.

一般化放射輝度 (21) は実数であるが, 負の値をとることがあり, また有限の広がりをもつ光源の外でゼロとなることも限らない. すなわち古典的な放射輝度に対する物理的要請を完全にはみたさない. この困難は,  $\mathbf{r}_{\perp}$  と  $\mathbf{k}_{\perp}$  を同時に指定できる物理量としての放射輝度というものが実際には考えられないという点から生じる. しかし, インコヒーレント光の幾何光学的極限に相当する準均一光源で波長がゼロの極限では, 上記の要請をみたくといわれている<sup>29)</sup>. また, たとえ一般化放射輝度が負の値をとるとしても, 通常の放射測定に負の放射輝度は現れない<sup>33-36)</sup>. それは,  $\mathbf{r}_{\perp}$  と  $\mathbf{k}_{\perp}$  のあいだの不確定性関係が装置の分解能を制限するために, 1 回の測定で 4 次元位相空間 ( $\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{k}_{\perp}$ ) の 1 点における  $B$  の値を得ることは不可能であることによる. 実際には, 必ず位相空間の適当な領域における  $B$  の平均値が測定される. その結果, 測定量は常に正となることが示されている<sup>30)</sup>.

#### 4. 時間に依存する一般化放射輝度

前節までで概観した部分コヒーレントな光の場のラジオメトリーでは, 一般化放射輝度が単色場のコヒーレンスを指定する相互スペクトル密度によって定義されていた. この定義は時間的に定常な多色場でも利用できるが<sup>3)</sup>, 純粋に時間に依存する場に適用することはできない. 最近この制限が緩和され, 一般化放射輝度が非定常場を含む一般の光の場のコヒーレンス関数によって再定義された<sup>37)</sup>. そのあらましを紹介する.

はじめに, 半空間  $0 < z$  上の必ずしも同一参照面上にない任意の 2 点における相互スペクトル密度

$$W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2; \omega) \equiv \langle U_{\omega}^*(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2) U_{\omega}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2) \rangle \quad (35)$$

を考える. ここで  $\mathbf{r}$  と  $\boldsymbol{\rho}$  は, 考えている 2 点の平均座標と相対座標である. これに (3) の振幅のフーリエ積分表示を代入し, フーリエ振幅の伝搬則 (6) を利用して, 平均座標における一般化放射輝度で表すと<sup>37)</sup>

$$W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2; \omega) = \int_{(2\pi)} d\Omega(\mathbf{s}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) \quad (36)$$

をうる. 式 (36) は, 任意の 2 点における相互スペクトル密度と Walther の一般化放射輝度 (21) の関係を与えるものである. 次に, 時間的に定常な場の相互コヒーレンス関数は, 相互スペクトル密度と時間差  $\tau$  に関するフーリエ変換

$$\Gamma(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2; \tau) = \int_0^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega\tau) W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2; \omega) \quad (37)$$

で結ばれている (ウィーナー・キンチンの定理). これに (36) を代入し,  $(\mathbf{s}, \omega)$  空間の積分を 3 次元波数空間の積分になおすと次式がえられる.

$$\Gamma(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2; \tau) = c \int \frac{d^3k}{k^2} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega\tau)] B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) \quad (38)$$

すなわち相互コヒーレンス関数は, 平均座標  $\mathbf{r}$  における一般化放射輝度に  $c \exp(-i\omega\tau)/k^2$  なる因子をかけたものと, 相対座標  $\boldsymbol{\rho}$  に関するフーリエ積分で結ばれている. これを逆に解くことにより, 一般化放射輝度は相互コヒーレンス関数によって次のように表される.

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) = \frac{k^2}{(2\pi)^3 c} \int d^3\rho \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega\tau)] \times \Gamma(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2; \tau) \quad (39)$$

式 (38) と (39) は, 場のコヒーレンス状態によることなく一般に成立するから, 様々な干渉計測法とラジオメトリーを結びつける基本的接点と考えられる. ただし, こ

<sup>6)</sup>  $\mathbf{k}_{\perp}$  空間における 2 次の位相因子  $\exp[-ik_{\perp}^2 z/(2k)]$  は,  $\mathbf{r}_{\perp}$  空間に変換すると  $[k/(2\pi iz)] \exp[-ikr_{\perp}^2/(2z)]$  となるから, 式 (34) は通常の近軸近似に相当する.

ではまだ時間的定常性が想定されている。しかしこれらの式で  $\tau=0$  とおいたものは、この制限をうけない。したがって、一般化放射輝度と場の空間相関関数である相互強度  $\Gamma(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}/2) \equiv \Gamma(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}/2; 0)$  は、場が時間的に定常か否かにかかわらず次の3次元フーリエ変換対を構成するという結論がえられる。

$$\Gamma(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}/2) = c \int \frac{d^3 k}{k^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) \quad (40)$$

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega) = \frac{k^2}{(2\pi)^3 c} \int d^3 \rho \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) \Gamma(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}/2) \quad (41)$$

さて、式(41)はWaltherの一般化放射輝度(21)を場の相互強度でかきなおしたものである。これは同時に、もとの(21)より広い適用範囲を有する一般化放射輝度の定義になっている。このことをはっきりさせるために、一般の光の場  $V(\mathbf{r}, t)$  (単色場とは限らない)の時間に依存するウィグナー関数

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) = \int d^3 \rho \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) \langle V^*(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}/2, t) V(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}/2, t) \rangle \quad (42)$$

を導入する。光学における通常のウィグナー関数(16)とは異なり、このウィグナー関数  $K(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t)$  は時間  $t$  をパラメータにもち、6次元の位相空間  $(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  における光の強度の分布を表すと解釈される。また、対象となる光の場に関しては、考えている空間領域に光源がないこと、今の場合  $z$  の正の方向に進行する場であることを除くと特に制限はない。そこで、同時刻の場の相関  $\langle V^*(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}/2, t) V(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}/2, t) \rangle$  は相互強度であり、時間的に定常な場では  $K(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t)$  の時間依存性は消えることに注意すると、(41)は  $k^2 / [(2\pi)^3 c] K(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t)$  なる形にかきかえられることがわかる。かくして、時間に依存する一般化放射輝度  $B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega; t)$  は、時間に陽に依存できるウィグナー関数によって

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega; t) = \frac{k^2}{(2\pi)^3 c} K(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) \quad (43)$$

と定義される。ここで、因子  $k^2/c$  は  $\mathbf{k}$  空間を  $(\mathbf{s}, \omega)$  空間に写すヤコビアンであり、 $(2\pi)^3$  はウィグナー関数  $K(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t)$  の正規化因子である。したがって光の場の一般化放射輝度というものは、6次元の方向・周波數位相空間  $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)$  における正規化されたウィグナー関数にほかならない。大ざっぱにいえば、方向・周波數位相空間における光の強度分布である。また、(43)の定義

は、Waltherの定義(21)を光の場が時間的に定常である場合の特別な表現として含んでいる。

一般化放射輝度の定義(43)は、光パルスの伝搬等の純粋に時間依存をとまなう光の場で利用できる。時空間的なパルス波形  $V(\mathbf{r}, t)$  や同時刻の相関関数がわかっている場合は、それを(42)、(43)に代入することにより時間的に伝搬するパルスとしての放射輝度が得られる。

一般化放射輝度(43) (あるいは(41))は、計測的応用の面からも利用価値がある。この定義は、光の場のコヒーレンスの測定によって放射輝度を測定することに関する一般定理をあたえる。そして、この定理を忠実に実現したものが瞳面干涉分光映像法<sup>38-41)</sup>である<sup>42)</sup>。すなわち、平均座標  $\mathbf{r}$  のまわりのある空間で3次元的に測定した相互強度の相対座標  $\boldsymbol{\rho}$  に関する3次元フーリエ変換をとると、平均座標における各方位、各スペクトルごとの一般化放射輝度が一挙に得られる。さらに、それぞれの一般化放射輝度は放射輝度の伝搬則(33)によって、平均座標からみて各方位ベクトル  $\mathbf{s}$  の始点方向に位置する光源上の点  $\mathbf{r}_\perp - z\mathbf{s}_\perp/s_z$  における一般化放射輝度に一致する(図3)。したがって、光源の2次元空間情報と分光情報が得られるわけである。こうして瞳面干涉分光映像法の原理は、一般化放射輝度の定義(43)とラジオメトリーの輸送方程式(15)からみると自明のこととなる。興味深いことは、瞳面干涉分光映像法のシステムは明らかに放射測光系の一種であって、在来の意味での結像系とは異なることである。なぜなら焦点距離が存在しないからである。すなわちコヒーレンス計測に基づく放射測光系は、視野のなかのすべての視線方向について無限大の焦点深度をもっている。

ラジオメトリーの基礎である放射輝度の定義について筆者なりにまとめてみた。異なる研究分野が錯綜した現代ラジオメトリー分野では、文献によって同じ物理量に対し異なる記法や定義、名称がしばしば現れる。そこで本稿では、Wolfらによるこの分野で伝統的に使用されてきた記法を尊重し、一部の定義を更新して用いた。また、いきなり式を文献から引用するのではなく、なるべく前後のつながりで物理内容を明らかにしようつとめた。

この小文が、読者の温故知新につながれば幸いである。

## 文 献

- 1) S. Chandrasekhar: *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1960).

- 2) A. Walther: "Radiometry and coherence," J. Opt. Soc. Am., **58** (1968) 1256-1259.
- 3) A. Walther: "Radiometry and coherence," J. Opt. Soc. Am., **63** (1973) 1622-1623.
- 4) R. Martinez-Herrero and P. M. Mejias: "Radiometric definitions for partially coherent sources," J. Opt. Soc. Am. A, **5** (1984) 556-558.
- 5) G. S. Agarwal, J. T. Foley and E. Wolf: "The radiance and phase-space representations of the cross-spectral density operator," Opt. Commun., **62** (1987) 67-72.
- 6) R. G. Littlejohn and R. Winston: "Correction to classical radiometry," J. Opt. Soc. Am. A, **10** (1993) 2024-2037.
- 7) E. Wolf: "Coherence and radiometry," J. Opt. Soc. Am., **68** (1978) 6-17.
- 8) L. A. Apresyan and Yu. A. Kravtsov: "Photometry and coherence: wave aspects of the theory of radiation transport," Usp. Fiz. Nauk., **142** (1984) 689-711 [Sov. Phys. Usp., **27** (1984) 301-313].
- 9) A. T. Friberg and B. J. Thompson, ed.: *Selected Papers on Coherence and Radiometry*, SPIE Milestone Series, MS69 (SPIE, Washington, 1993).
- 10) L. Mandel and E. Wolf: *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995) pp. 287-307.
- 11) H. P. Baltés, J. Geist and A. Walther: "Radiometry and coherence," *Inverse Source Problems in Optics*, ed. H. P. Baltés (Springer-Verlag, New York, 1978) pp. 119-154.
- 12) A. S. Marathay: *Elements of Optical Coherence Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1982) pp. 239-305.
- 13) P. W. Hawkes and E. Kasper: *Wave Optics vol. 3* (Academic Press, London, 1994) pp. 1719-1760.
- 14) 黒田和男: "コヒーレンス関数の伝搬・高次のコヒーレンス", 光学, **14** (1985) 485-491.
- 15) 白井智宏, 朝倉利光: "コヒーレンスと放射測光学", コヒーレンスの不思議 (日本光学会 (応用物理学会), 1995) pp. 129-146.
- 16) E. W. Marchand and E. Wolf: "Angular correlation and the far-zone behavior of partially coherent fields," J. Opt. Soc. Am., **62** (1972) 379-385.
- 17) T. Jansson and R. Janicki: "An eigenvalue formulation of inverse theory of scalar diffraction," Optik (Stuttgart), **56** (1980) 429-441.
- 18) A. T. Friberg: "Effects of coherence in radiometry," Opt. Eng., **21** (1982) 927-936.
- 19) N. L. Balazs and B. K. Jennings: "Wigner's function and other distribution functions in mock phase space," Phys. Rep., **104** (1984) 347-391.
- 20) M. Hellery, R. F. O'Connell, M. O. Scully and E. P. Wigner: "Distribution functions in physics: fundamentals," Phys. Rep., **106** (1984) 121-167.
- 21) E. Wigner: "On the quantum corrections for thermodynamic equilibrium," Phys. Rev., **40** (1932) 749-759.
- 22) J. E. Moyal: "Quantum mechanics as a statistical theory," Proc. Cambridge Philos. Soc., **45** (1949) 99-124.
- 23) M. J. Bastiaans: "The Wigner distribution function applied to optical signals and systems," Opt. Commun., **25** (1978) 26-30.
- 24) 河村直樹, 岩井俊昭, 竹森民樹: "液晶空間光変調素子を用いたウィグナー分布関数による実時間位相形状計測", 光学, **22** (1993) 281-288.
- 25) A. W. Lohmann: "Image rotation, Wigner rotation and the fractional Fourier transform," J. Opt. Soc. Am. A, **10** (1993) 2181-2186.
- 26) A. W. Lohmann and B. H. Soffer: "Relationships between Radon-Wigner and fractional Fourier transforms," J. Opt. Soc. Am. A, **11** (1994) 1798-1801.
- 27) M. N. Vesperinas: "Classical radiometry and radiative transfer theory: A short-wavelength limit of a general mapping of cross-spectral densities in second-order coherence theory," J. Opt. Soc. Am. A., **3** (1986) 1354-1359.
- 28) H. W. Carter and E. Wolf: "Coherence and radiometry with quasihomogeneous planar sources," J. Opt. Soc. Am., **67** (1977) 785-796.
- 29) J. T. Foley and E. Wolf: "Radiometry as a short-wavelength limit of statistical wave theory with globally incoherent sources," Opt. Commun., **55** (1985) 236-241.
- 30) A. T. Friberg and R. J. Sudol: "Propagation parameters of Gaussian Shell-model beams," Opt. Commun., **41** (1982) 383-387.
- 31) 白井智宏: "3次元の広がりをもつ非等法的ガウス型シェルモデル光源の放射特性", 機械技術研究所所報, **48** (1994) 24-34.
- 32) H. Yoshimura, N. Takai and T. Asakura: "Realization of multiple images resulting from the partially coherent light from a Gaussian Schell-model source," J. Opt. Soc. Am. A, **11** (1994) 2112-2120.
- 33) W. Welford and R. Winston: "Generalized radiance and practical radiometry," J. Opt. Soc. Am. A, **4** (1987) 545-547.
- 34) R. Winston and W. T. Welford: "Measurement of radiance," Opt. Commun., **76** (1990) 191-193.
- 35) R. Winston and W. T. Welford: "Non-localizability of generalized radiance," Opt. Commun., **81** (1991) 155-156.
- 36) R. G. Littlejohn and R. Winston: "Generalized radiance and measurement," J. Opt. Soc. Am. A, **12** (1995) 2736-2743.
- 37) K. Yoshimori and K. Itoh: "Interferometry and radiometry," J. Opt. Soc. Am. A, **14** (1997) 3379-3387.
- 38) B. Clark: *Synthesis Imaging*, Course Notes, National Radio Astronomy observatory (NARO) Summer School, Socorro, New Mexico, ed. R. A. Perley, F. F. Schwab and A. H. Bridle (1985) 1-7.
- 39) K. Itoh and Y. Ohtsuka: "Fourier-transform spectral imaging: retrieval of source information from three-dimensional spatial coherence," J. Opt. Soc. Am. A, **3** (1986) 94-100.
- 40) J.-M. Mariotti and S. T. Ridgeway: "Double Fourier spatio-spectral interferometry: Combining high spectral and spatial resolution in the near infrared," Astron. Astrophys., **195** (1988) 350-363.
- 41) K. Itoh: "Interferometric multispectral imaging," *Progress in Optics, XXXV*, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1996) p. 145-196.
- 42) 伊東一良, 平井亜紀子, 吉森 久: "干渉分光映像法の進展と超高速並列処理システム", 応用物理, **66** (1997) 426-436.

(1997年8月6日受理)