

内部応力分布があるガラス内の光線追跡

橋本 純夫

(株)ニコン光学本部第2光学部 〒140 東京都品川区西大井 1-6-3

Ray Tracing in the Glass Which Has Stress Distribution

Sumio HASHIMOTO

Industrial Optics Department, Nikon K. K., 1-6-3, Nishi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo 140

When the glass has stress distribution by thermal distribution etc., the incident ray to the glass is polarized as the glass is changed to an anisotropic medium. The other hand, when the stress in the glass is locally different, the refractive index is locally different, too. The ray tracing method on the condition that both the glass was anisotropic and had gradient index distribution was investigated.

1. 序

ガラスの一部が、光線の吸収等で温度上昇することにより温度差ができる場合、ガラス内で歪みが発生し、内部応力が発生する。発生する内部応力は通常方向異方性があるので、屈折率異方性があり、光線がガラスを透過すると、偏光になる。一方、内部応力は、ガラスの位置によって異なっていて、それに従って屈折率も異なるので、gradient index 光線追跡をする必要がある。このように屈折率異方性があり、かつ gradient index である場合の光線追跡の方法については従来の文献には述べられていないので、今回新たに検討した。

第2章では、まず空気とガラスの境界面に光線が入射して屈折する場合の計算方法について、簡単に述べる。

第3章では、屈折率異方性がある媒質でも計算できるような、gradient index 光線追跡方法について述べる。

第4章では、第3章の gradient index 光線追跡の計算に必要な、屈折率楕円体の主軸方向に座標変換せずに波面法線方向の屈折率を求める方法を述べる。

第5章では、第4章で求めた電気変位ベクトルの方向の単位ベクトルから、光線ベクトルを求める方法を述べる。

2. ガラス表面での屈折

内部応力のあるガラス内部での光線追跡をする前に、まずガラス表面での屈折光線追跡をする必要がある。こ

の場合、屈折の様子は、2軸結晶と同様になる。1軸結晶の表面での屈折の場合とほぼ同様な考え方で計算できるが³⁾、4次方程式を解く必要がある。Gradient index 光線追跡との比較のためにも、以下に簡単に述べる。

x 軸を光軸（空気とガラスの境界面の法線方向）とする。光線が屈折する点において、出射側での xyz 座標系が直交変換されて、応力テンソルの主軸方向の座標系 $x'y'z'$ 座標系になったとする。すなわち

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{x'x} & C_{x'y} & C_{x'z} \\ C_{y'x} & C_{y'y} & C_{y'z} \\ C_{z'x} & C_{z'y} & C_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1)$$

このように直交変換された場合、応力 σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) も変換されて σ'_{kl} ($k, l = x', y', z'$) になったとすると、

$$\sigma'_{kl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 C_{ki} C_{lj} \sigma_{ij} \quad (2)$$

となる。このとき、応力 σ'_{kl} のうち、 $k \neq l$ のもの、すなわち、せん断応力はすべてゼロになる。このとき、応力が加わる前のガラスの屈折率を n_0 とすると、主応力 σ_{kk} から異方性屈折率を求めるためには、次のようにする。

$$n'_x = n_0 + C_1 \sigma_{x'x'} + C_2 (\sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'}) \quad (3)$$

$$n'_y = n_0 + C_1 \sigma_{y'y'} + C_2 (\sigma_{z'z'} + \sigma_{x'x'}) \quad (4)$$

$$n'_z = n_0 + C_1 \sigma_{z'z'} + C_2 (\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'}) \quad (5)$$

ここで、 C_1 、 C_2 は光弾性定数である。

また、入射光、および屈折光の波面法線の方向余弦

(N_x, N_y, N_z) , および (S_x, S_y, S_z) も応力テンソルの主軸方向の座標系 $x'y'z'$ に変換されて, $(N_{x'}, N_{y'}, N_{z'})$, および $(S_{x'}, S_{y'}, S_{z'})$ になったとすると,

$$N_i = \sum_{j=1}^3 C_{ij} N_j \quad (6)$$

$$S_i = \sum_{j=1}^3 C_{ij} S_j \quad (7)$$

になる. ただし, $i = x', y', z', j = x, y, z$ である.

屈折光の方向余弦が, $(S_{x'}, S_{y'}, S_{z'})$ に変換された場合, フレネルの公式¹⁾ に代入することができて,

$$\frac{S_{x'}^2}{u^2 - u_{x'}^2} + \frac{S_{y'}^2}{u^2 - u_{y'}^2} + \frac{S_{z'}^2}{u^2 - u_{z'}^2} = 0 \quad (8)$$

ここで, u は屈折光の位相速度で, $u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}$ は, 屈折率楕体の主軸方向の屈折率 $n_{x'}, n_{y'}, n_{z'}$ と光速 c とによって, $u_{x'} = c/n_{x'}, u_{y'} = c/n_{y'}, u_{z'} = c/n_{z'}$ と表される.

一方, $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$, $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, 境界面の1点を原点とした位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$, 入射光の位相速度を u_0 , 時間を t とすると, 屈折境界の平面の前後において, 場が連続であることから, 境界面で次式が成立する²⁾.

$$t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{N}}{u_0} = t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{S}}{u} \quad (9)$$

$$\therefore \vec{r} \cdot \left(\frac{\vec{N}}{u_0} - \frac{\vec{S}}{u} \right) = 0 \quad (10)$$

式(10)が境界面のすべての点で成立するためには, $\vec{N}/u_0 - \vec{S}/u$ がゼロでなければいけない. x 軸に垂直な面が境界面であるので, 式(10)より,

$$\frac{N_y}{u_0} = \frac{S_y}{u} \quad (11)$$

$$\frac{N_z}{u_0} = \frac{S_z}{u} \quad (12)$$

次に, $X = S_x/u, Y = S_y/u, Z = S_z/u, X' = S_{x'}/u, Y' = S_{y'}/u, Z' = S_{z'}/u$ とおくと, 式(11), (12)より,

$$Y = \frac{S_y}{u} = \frac{N_y}{u_0} \quad (13)$$

$$Z = \frac{S_z}{u} = \frac{N_z}{u_0} \quad (14)$$

となり, Y, Z は, 入射光の方向余弦が決まれば, 式(13), (14)より決まる量である. したがって未知数は X だけになる. 式(8)を X', Y', Z' で表し, さらに式(7)の変換式により X, Y, Z で表すと, 未知数 X に関する4次方程式となり, ニュートン法によって求めることができる. X が求められれば, 式(13), (14)により, 屈折光線の位相速度 u , および (S_x, S_y, S_z) が求められる.

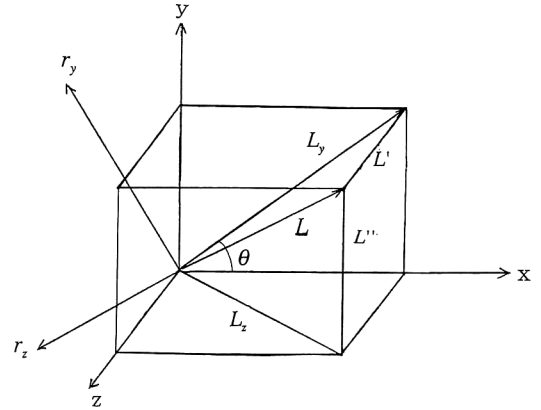


Fig. 1. Direction cosine of wave normal.

3. 屈折率異方性がある場合の gradient index 光線追跡

ガラス内部の応力が場所によって異なる分布をもつ場合, 屈折率も場所によって異なる分布をもつので, gradient index 光線追跡をする必要がある.

しかし, 屈折率異方性のある媒質の場合, 等方性の媒質とは異なって, 単純に光線に関する微分方程式³⁾

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \text{grad } n$$

を用いることはできない. そこで, 屈折率異方性のある場合でも, 「位相が同じ位置をプロットしていくと波面が形成され, その波面に垂直な方向に, 光波の位相が進行していく」という考え方をを用いることにする.

この考え方だと, 波面に垂直な方向において, 屈折率の高いほうは低いほうよりも位相速度が遅いので, 波面が曲げられ, 光線は屈折率の高いほうへ進行する. これを定式化することによって, 屈折率異方性がある場合でも光線追跡が可能になることを以下に示す.

光線の波面法線方向が, xyz 座標系で (S_x, S_y, S_z) であり, その方向に微小距離 L だけ波面が進行したとする. L を xy 面および xz 面に射影した距離をそれぞれ L_y, L_z とし,

$$L^2 = L_y^2 + L_z^2 \quad (15)$$

$$L^2 = L_z^2 + L''^2 \quad (16)$$

とする. つまり, $L_y = L\sqrt{S_x^2 + S_y^2}$, $L_z = L\sqrt{S_x^2 + S_z^2}$ となる. L_y, L_z の方向, つまりベクトル $(S_x, S_y, 0)$, $(S_x, 0, S_z)$ の方向に垂直な方向, つまり $(-S_y, S_x, 0)$, $(-S_z, 0, S_x)$ の方向の座標軸をそれぞれ r_y, r_z とする (Fig. 1 参照).

光速を c , 波面法線方向の屈折率を n とすると, 位

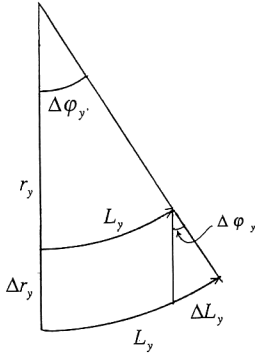


Fig. 2. Slight proceeding of wave surface.

相速度は c/n であり、位相が距離 L 進む間に、 Δt だけ時間を要したとすると、

$$L = \frac{c}{n\Delta t} \quad (17)$$

ところが xy 平面上で L_y だけ進行する間に角度が $\Delta\varphi_y$ だけ変化したとすると、Fig. 2 より

$$\Delta\varphi_y = \frac{L_y + \Delta L_y - L_y}{\Delta r_y} = \frac{L_y - \frac{\partial L_y}{\partial r_y} \cdot \Delta r_y - L_y}{\Delta r_y} = -\frac{\partial L_y}{\partial r_y} \quad (18)$$

式(15)より、

$$2LdL = 2L_y dL_y + 2L' dL' \quad (19)$$

$$\therefore \frac{\partial L_y}{\partial L} = \frac{L}{L_y} \quad (20)$$

したがって式(18)は、

$$\Delta\varphi_y = -\frac{\partial L_y}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial r_y} = -\frac{L}{L_y} \cdot \frac{\partial L}{\partial r_y} \quad (21)$$

ここで式(17)を r_y で微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial r_y} = -\frac{c}{n^2} \Delta t \frac{\partial n}{\partial r_y} = -\frac{L}{n} \frac{\partial n}{\partial r_y} \quad (22)$$

式(21)に式(22)を代入することにより、

$$\Delta\varphi_y = -\frac{L}{L_y} \left(-\frac{L}{n} \frac{\partial n}{\partial r_y} \right) = \frac{L^2}{nL_y} \frac{\partial n}{\partial r_y} \quad (23)$$

ところで、文献⁴⁾により、曲線が ΔS_y だけ移動する間に、接線の向きが $\Delta\varphi_y$ だけ変化したとすると、 $\Delta\varphi_y / \Delta S_y$ の極限は、曲線の曲率になり、 xy を曲線を含む唯一の平面として、

$$\frac{\Delta\varphi_y}{\Delta S_y} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (24)$$

Fig. 2 より、 $\Delta\varphi_y = \Delta\varphi_y$ と近似してよく、 $\Delta S_y = L_y$ とする。すると、式(23)より、

$$\frac{\Delta\varphi_y}{\Delta S_y} = \frac{\Delta\varphi_y}{L_y} = \frac{L^2}{L_y^2} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r_y} \quad (25)$$

となる。また、

$$\frac{S_y}{S_x} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{S_z}{S_x} = \frac{dz}{dx} \quad (26)$$

なので、

$$\frac{L^2}{L_y^2} = \frac{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}{S_x^2 + S_y^2} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (27)$$

また、

$$\frac{\partial n}{\partial r_y} = \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dr_y} + \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dy}{dr_y} \quad (28)$$

Fig. 1 において、

$$\frac{dx}{dr_y} = -\sin \theta = \frac{-\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \quad (29)$$

$$\frac{dy}{dr_y} = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \quad (30)$$

式(29)、(30)を式(28)に代入することにより、

$$\frac{\partial n}{\partial r_y} = \frac{\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \quad (31)$$

式(24)に、式(25)、(27)、および(31)を代入して、

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dy}{dx}}{n \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \quad (32)$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dy}{dx} \right) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \quad (33)$$

同様にして、

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dz}{dx} \right) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \quad (34)$$

式(33)、(34)により、波面法線方向を決定することができる。なお式(33)、(34)は、フェルマーの原理に対して、オイラー・ラグランジュ方程式を用いることにより導出することができる⁵⁾が、本論文による導出法により、より直感的に gradient index による波面の進行方向の変動が理解できると考えられる。

次に、式(33)、(34)より、微小時間 Δt 経過する間の、波面法線の方向余弦 (S_x , S_y , S_z) の微小変化を求める方法を説明する。まず、式(26)の両辺を x で微分することにより、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{S_y}{S_x} \right) = \frac{1}{S_x^2} \left(S_x \frac{dS_y}{dx} - S_y \frac{dS_x}{dx} \right) \quad (35)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{S_z}{S_x} \right) = \frac{1}{S_x^2} \left(S_x \frac{dS_z}{dx} - S_z \frac{dS_x}{dx} \right) \quad (36)$$

また、式(33)、(34)において、

$$\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{S_y}{S_x} \right) = D_y \quad (37)$$

$$\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{S_z}{S_x} \right) = D_z \quad (38)$$

と定義する。また、

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1 \quad (39)$$

を x で微分して、

$$S_x \frac{dS_x}{dx} + S_y \frac{dS_y}{dx} + S_z \frac{dS_z}{dx} = 0 \quad (40)$$

となる。式(33), (34)に、式(35)~(40)を代入し、 dS_y/dx , dS_z/dx を未知数とする連立方程式を解くと、

$$\frac{dS_y}{dx} = \frac{1}{S_x} [(S_x^2 + S_z^2)D_y - S_y S_z D_z] \quad (41)$$

$$\frac{dS_z}{dx} = \frac{1}{S_x} [(S_x^2 + S_y^2)D_z - S_y S_z D_y] \quad (42)$$

となり、式(37), (38)に、 $\partial n/\partial x$, $\partial n/\partial y$, $\partial n/\partial z$ を代入して、それらを式(41), (42)に代入することにより、 S_y , S_z の微小変化 dS_y/dx , dS_z/dx が求められる。

実際に計算するときには、 x 座標で微小距離 Δx 進んだときの波面法線方向余弦 $S_{y'}$, $S_{z'}$ を、進む前の S_y , S_z により、

$$S_{y'} = S_y + \frac{dS_y}{dx} \Delta x \quad (43)$$

$$S_{z'} = S_z + \frac{dS_z}{dx} \Delta x \quad (44)$$

というように逐次的かつ近似的に求める。微小距離 Δx は、1つの硝材を200分割以上することによって求める。なお、複屈折率物質中では、波面法線方向と光線方向が異なるので、第5章で求める関係を用いればよい。

4. Gradient index 光線追跡における波面法線方向の屈折率とその微分

前章のように、gradient index 光線追跡をする場合には、逐次微小距離ずつ移動することになる。しかし、実際に波面法線方向の屈折率を求める場合、第2章で屈折面に対して行ったように、波面法線楕円体の主軸方向に座標変換してフレネル公式を適用し、さらに微小距離進行後に座標変換して公式を適用することを繰り返すと、数値計算上の誤差が蓄積され、光線追跡値が発散することがわかる。

したがって以下に、波面法線方向の屈折率とその微分を、座標変換せずに求める方法を述べる。

まず、文献⁶⁾によると、応力が加えられていない状態での波面法線楕円体

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1 \quad (45)$$

が、応力によって変化した波面法線楕円体を、

$$a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{yz}yz + a_{zx}zx + a_{xy}xy = 1 \quad (46)$$

とする。ガラスのように等方媒質の場合、線形性を仮定すれば、

$$a_{xx} - \frac{1}{\varepsilon_x} = q_{11}\sigma_{xx} + q_{12}\sigma_{yy} + q_{12}\sigma_{zz} \quad (47)$$

$$a_{yz} = 2(q_{11} - q_{12})\sigma_{yz} \quad (48)$$

等方媒質の場合、応力のない場合の屈折率を n_0 とすると、 $\varepsilon_x = n_x^2/\mu = n_0^2/\mu$ なので、これを式(47)に代入して、

$$a_{xx} - \frac{\mu}{n_0^2} = q_{11}\sigma_{xx} + q_{12}\sigma_{yy} + q_{12}\sigma_{zz} \quad (49)$$

a_{xx} を応力がある場合の屈折率 n_{xx} によって、

$$a_{xx} = \frac{\mu}{n_x^2} \quad (50)$$

と表すことができるので、

$$a_{xx} - \frac{\mu}{n_x^2} = \frac{\mu}{n_0^2} + q_{11}\sigma_{xx} + q_{12}\sigma_{yy} + q_{12}\sigma_{zz} \quad (51)$$

また、応力光学定数と、光弾性定数 C_{11} , C_{12} との関係は、

$$q_{11} = -\frac{2\mu}{n_0^3} C_1 \quad (52)$$

$$q_{12} = -\frac{2\mu}{n_0^3} C_2 \quad (53)$$

である。以上が、文献等で示されている関係式である。

そこで、直交変換しなくて楕円の主軸が座標軸に一致しない一般の屈折率楕円体の式を、

$$\sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij} x_i x_j = 1 \quad (x_i, x_j = x, y, z) \quad (54)$$

とすると、式(47), (48), および(51)より、 β_{ij} と q_{11} , q_{12} の関係式は、

$$\beta_{ii} = \frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{\mu} \left[q_{11}\sigma_{ii} + q_{12} \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{jj} - \sigma_{ii} \right) \right] \quad (55)$$

$i \neq j$ のとき、

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\mu} (q_{11} + q_{12}) \sigma_{ij} \quad (56)$$

である。なお、主軸変換した波面法線楕円体は $x^2/\varepsilon_x + y^2/\varepsilon_y + z^2/\varepsilon_z = 1$ 、屈折率楕円体は $x^2/n_x + y^2/n_y + z^2/n_z = 1$ であるが、 $n_x = \mu\varepsilon_x$ より、一般に波面法線楕円体を $1/\mu$ 倍に比例すれば、屈折率楕円体になることがわかる。

次に、「波面法線楕円体を考えて、波面法線楕円体の原点を通り、波面法線ベクトルと直交する平面と楕円体の交線は楕円になる。このとき、この楕円の主軸の長さは、位相速度の逆数に比例し、その主軸の方向は、電気変位ベクトル \vec{D} の振動方向に一致している」という原理を用いる⁷⁾。

すなわち、波面法線方向の単位ベクトルを $\vec{S}=(S_x, S_y, S_z)$ とし、それに直交する単位ベクトルを $\vec{P}=(P_x, P_y, P_z)$, $\vec{R}=(R_x, R_y, R_z)$ とし、 \vec{P} , \vec{R} と互いに直交するとする。 \vec{P} を yz 平面上のベクトルになるように選ぶと、

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x=0 \\ P_y=-\frac{S_z}{\sqrt{S_y^2+S_z^2}} \\ P_z=\frac{S_y}{\sqrt{S_y^2+S_z^2}} \end{array} \right\} \quad (57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x=-\sqrt{S_y^2+S_z^2} \\ R_y=\frac{S_x S_y}{\sqrt{S_y^2+S_z^2}} \\ R_z=\frac{S_x S_z}{\sqrt{S_y^2+S_z^2}} \end{array} \right\} \quad (58)$$

式(57), (58)より, $\vec{S} \cdot \vec{P}=0$, $\vec{S} \cdot \vec{R}=0$, $\vec{P} \cdot \vec{R}=0$ を満たしているの、 \vec{S} , \vec{P} , \vec{R} は、互いに直交する。 (x, y, z) を \vec{S} , \vec{P} , \vec{R} を直交座標軸とする座標上の点 (s, p, r) に変換する。この場合

$$\left\{ \begin{array}{l} x=sS_x+pP_x+rR_x \\ y=sS_y+pP_y+rR_y \\ z=sS_z+pP_z+rR_z \end{array} \right\} \quad (59)$$

\vec{S} に垂直な平面 $s=0$ において、

$$\left\{ \begin{array}{l} x=pP_x+rR_x \\ y=pP_y+rR_y \\ z=pP_z+rR_z \end{array} \right\} \quad (60)$$

これを、

$$S_i=pP_i+rR_i \quad (i=x, y, z) \quad (61)$$

と表す。式(61)を式(55), (56)に代入して、

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}(pP_i+rR_i)(pP_j+rR_j)=1 \quad (62)$$

式(62)は、 pr 平面上で「波面法線ベクトルと直交する平面と楕円体の交線」すなわち、楕円を表している。この楕円を、

$$Ap^2+Bpr+Cr^2=1 \quad (63)$$

とおくと、

$$A=\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}P_iP_j \quad (64)$$

$$B=\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}(P_iR_j+P_jR_i) \quad (65)$$

$$C=\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}R_iR_j \quad (66)$$

となる。 \vec{P} , \vec{R} の座標軸を角度 α だけ回転して、 \vec{U} , \vec{T} になったとすると、 \vec{U} , \vec{T} の座標軸による座標値 u, t は、

$$\left\{ \begin{array}{l} u=p \cos \alpha+r \sin \alpha \\ t=-p \sin \alpha+r \cos \alpha \end{array} \right\} \quad (67)$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} p=u \cos \alpha-t \sin \alpha \\ r=u \sin \alpha+t \cos \alpha \end{array} \right\} \quad (68)$$

式(63)に、式(68)を代入して整理すると、 u, t を変数とする 2 次式

$$\begin{aligned} &u^2(A \cos^2 \alpha+B \cos \alpha \sin \alpha+C \sin^2 \alpha) \\ &+ut\{-2A \cos \alpha \sin \alpha+B(\cos^2 \alpha-\sin^2 \alpha) \\ &+2C \sin \alpha \cos \alpha\} \\ &+t^2(A \sin^2 \alpha-B \cos \alpha \sin \alpha+C \cos^2 \alpha)=1 \end{aligned} \quad (69)$$

になるが、 \vec{U} , \vec{T} が楕円の主軸になるためには、2 次式の ut の係数

$-2A \cos \alpha \sin \alpha+B(\cos^2 \alpha-\sin^2 \alpha)+2C \sin \alpha \cos \alpha$ がゼロになる必要がある。したがって、 α の満足すべき条件は、

$$\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C} \quad (70)$$

である。次に、 $\vec{d}=\vec{D}/|\vec{D}|$ を電気変位ベクトル \vec{D} の方向の単位ベクトルとすると、 \vec{d} の 2 つの単位ベクトル \vec{d}_1, \vec{d}_2 は、前述の文献⁷⁾により、楕円の主軸方向に一致しているので、

$$\vec{d}_1=\vec{U}=\vec{P} \cos \alpha+\vec{R} \sin \alpha \quad (71)$$

$$\vec{d}_2=\vec{T}=-\vec{P} \sin \alpha+\vec{R} \cos \alpha \quad (72)$$

式(71), (72)に、式(69)により求めた α と、式(56), (57)を代入することによって 2 つの単位ベクトル \vec{d}_1, \vec{d}_2 が求められる。

次に、式(71), (72)で求めた \vec{d}_1, \vec{d}_2 から、位相速度 v_p を求める。前述の文献⁷⁾より、「 \vec{D} の方向に一致している波面法線楕円体による楕円の主軸の長さは、位相速度の逆数に比例している」という原理を用いる。波面法線楕円体をそれに比例している屈折率楕円体とすると、その \vec{d} による主軸の長さは、波面法線方向の屈折率 $n_p=c/v_p$ (c は光速) そのものになる。したがって \vec{d} による主軸のベクトル $n_p \vec{d}=(n_p d_x, n_p d_y, n_p d_z)$ の成分を式(54)に代入することにより、 $i, j=x, y, z$ とすると

$$n_p^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} d_i d_j=1 \quad (73)$$

$$\therefore n_p=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} d_i d_j}} \quad (74)$$

式(74)に、式(55)を代入すれば、 n_p を求められるが、 \vec{d} が微小変化する場合、 n_p とその微分を求めると、式(74)に平方根の計算があるために計算誤差が出るので、この式の平方根をべき級数展開して近似する必要がある。式(74)に式(55)を代入する。また数学公式集より、

$|x| < |a|$ のとき,

$$(a+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{x}{2a} + \frac{3x^2}{8a^3} - \dots \right) \quad (75)$$

$1/n_0$ は, $q_{11}\sigma_{ii}/\mu$ 等に対して十分大きいので, 式(75)の第2項までをとって近似すると,

$$n_p = n_0 \left[1 - \frac{n_0^2}{2} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{q_{11}}{\mu} \sigma_{ii} + \frac{q_{12}}{\mu} \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{jj} - \sigma_{ii} \right) \right\} d_i^2 - \frac{n_0^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{1}{\mu} (q_{11} - q_{12}) \sigma_{ij} d_i d_j \right] \quad (76)$$

式(76)に式(52), (53)を代入して, $\sum_{i=1}^3 d_i^2 = 1$ を考慮すると,

$$n_p = n_0 + C_2 \sum_{j=1}^3 \sigma_{jj} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (C_1 - C_2) \sigma_{ij} d_i d_j \quad (77)$$

となる. この式が, 主軸に変換しない場合の波面法線方向の屈折率を与える式になる (この式は, 本論文によって新たに提示されたものである).

次に式(77)を, $x_k (= x, y, z)$ で微分すると,

$$\frac{\partial n_p}{\partial x_k} = C_2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{jj}}{\partial x_k} + (C_1 - C_2) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} d_i d_j + (C_1 - C_2) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \left(d_i \frac{\partial d_j}{\partial x_k} + d_j \frac{\partial d_i}{\partial x_k} \right) \quad (78)$$

式(78)の $\partial \sigma_{ij} / \partial x_k$ は, 応力をべき級数展開して微分することによって求められる. また, ベクトル \vec{d} は, 式(71), (72)のように2つの値 \vec{d}_1, \vec{d}_2 をとるが, これらを微分することによって, $\partial d_i / \partial x_k$ が求められ, 式(78)に d_i および $\partial d_i / \partial x_k$ を代入することによって, 波面法線方向の屈折率の距離による微分が求められ, それらを式(37), (38)に代入することによって, 屈折率異方性がある場合でも, gradient index の逐次光線追跡をすることができる. なお, 偏光方向は, 逐次近似ごとに2本に分離すべきかもしれないが, 実際の評価としては, 逐次近似ごとに隣接しているほうのベクトル \vec{d} のみ採用すれば十分であると考えられる.

5. 光線方向を求める方法

波面法線ベクトルと光線ベクトルの関係は, 通常の屈折率異方性媒質の場合, 波面法線方向を (S_1, S_2, S_3) , 光線方向を (R_1, R_2, R_3) とすると, 文献⁹⁾にあるように,

$$R_i = \left\{ u^2 + \frac{g^2}{u^2 - u_i^2} \right\} \frac{S_i}{\sqrt{u^4 + g^2}} \quad (79)$$

$$g^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2}}, \quad i=1, 3 \quad (80)$$

となる. しかし, 応力のない状態で等方性媒質であるものが, 応力によって初めて屈折率異方性のある媒質にな

った場合, $u^2 - u_i^2 \cong 0$ となり, 上式で計算すると, 分母に $u^2 - u_i^2$ があるために, 桁落ちのため光線追跡値が発散する場合が多い.

このような場合, 光線方向を求めるのに, 光線方向は, ポインティングベクトル \vec{S} の方向であり, \vec{S} は電気ベクトル \vec{E} と磁気ベクトル \vec{H} とによって,

$$\vec{S} = \frac{C}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (81)$$

と表されることを利用する.

まず, 磁気ベクトル \vec{H} の方向の単位ベクトル \vec{h} は, \vec{d} に垂直である. 文献⁷⁾より明らかなように, 式(71), (72)の \vec{d} の2つのベクトル \vec{d}_1, \vec{d}_2 において, $\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2$ なので,

$$\vec{h}_1 = \vec{d}_2, \quad \vec{h}_2 = \vec{d}_1 \quad (82)$$

となる. また, 電気変位ベクトル \vec{D} の成分 D_i は, 電気ベクトル \vec{E} の成分 E_j と誘電テンソル ϵ_{ij} によって,

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (83)$$

と表せるので⁹⁾, E_i は, 誘電テンソルの逆行列 ϵ_{ij}^{-1} によって,

$$E_i = \sum_j \epsilon_{ij}^{-1} D_j \quad (84)$$

と表され, それにより, \vec{E} の単位ベクトル \vec{e} が求められる. 光線ベクトル \vec{r} の方向は, ポインティングベクトル \vec{S} の方向なので, 式(81)より,

$$\vec{r} = \vec{e} \times \vec{h} \quad (85)$$

となる. 以上のような方法で, 第3章で求めた波面法線ベクトルから, ベクトル \vec{d} を介することによって光線ベクトルを計算することにより, 実際に光線が通過する位置を求めることができる. 内部応力のあるガラスの場合, 従来のように波面法線ベクトルの成分から直接光線ベクトルを求める方法よりも, この方法のほうが, 光線追跡値を発散させないのでよい.

6. 計算例

前章までに述べた計算方法で, 熱応力によるガラス内の屈折率変動による収差変動を計算し, 温度変動による屈折率変動による ($\partial n / \partial \theta$ による) 収差変動と比較した (なお, $\partial n / \partial \theta$ による収差変動は, 光線方程式をルンゲ・クッタ法で解くこと¹⁰⁾により求めた).

計算例として, 外径 100 mm, 厚さ 20 mm の円筒形の石英に, 照射径 40 mm, 全照射量 1 W の光線が入射した場合を考えた. 円筒形の縁の部分からのみ熱が流出して, 縁の部分の温度上昇はゼロであるとし, 円筒形の側面からは熱が流出しないと仮定した. 石英の熱伝導率

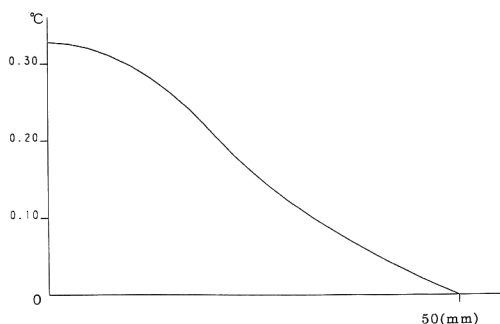


Fig. 3. Thermal distribution on the radial direction.

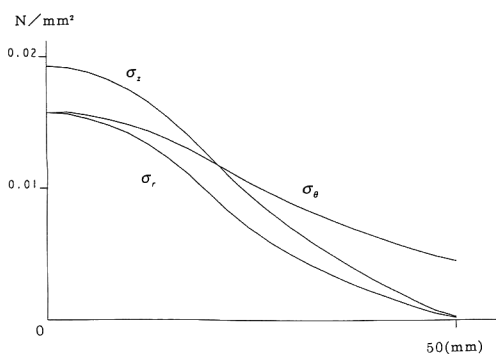


Fig. 4. Stress distribution on the radial direction.

は、 $0.00138 \text{ W/mm} \cdot \text{°C}$ 、吸収率は $0.02/\text{cm}$ 、ヤング率は、 $0.72 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比は 0.164 、熱膨張率は $5.5 \times 10^{-7}/\text{°C}$ 、 $\partial n/\partial \theta$ は $1.5 \times 10^{-5}/\text{°C}$ 、光弾性定数は、 $C_1 = 6.495 \times 10^{-7} \text{ mm}^2/\text{N}$ 、 $C_2 = 4.176 \times 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$ である。

まず、上記のように光線を照射し続けて平衡状態に達したときの、円筒形の石英の中心部分の温度上昇は 0.328°C で、周辺に向かってなだらかに減少している (Fig. 3 参照)。このような温度上昇分布から熱応力分布を計算すると、円筒形の石英の中心部分の主応力 σ_r 、 σ_θ 、 σ_z およびせん断応力 τ_{rz} は $\sigma_r = \sigma_\theta = 0.0159 \text{ N/mm}^2$ 、 $\sigma_z = 0.0193 \text{ N/mm}^2$ 、 $\tau_{rz} = 0.000198 \text{ N/mm}^2$ となり、これらも周辺に向かってなだらかに減少している (Fig. 4 参照)。

上記のような形状の石英に、半径 50 mm の平行光束を透過させ、焦点距離 298.4 mm のフィゾーレンズでほぼ 1 点に集光させたときの球面収差について、上記の照射条件により照射する前と、照射して平衡状態に達して、熱応力状態になった場合の球面収差の差をとることにより、球面収差変動を算出した。その結果が、

Table 1. Change of spherical aberration.

H	ΔS		
	by $\partial n/\partial \theta$	by stress distribution	
		(A)	(B)
50	-0.637	-0.00517	-0.00434
35	-4.543	-0.00541	-0.00453
25	-10.337	-0.00551	-0.00462
15	-15.332	-0.00558	-0.00468

ΔS : Change of spherical aberration (μm), H : initial ray height (mm).

Table 1 になる (光軸からの高さをもつ平行光線は、子午面内にあるとする)。

Table 1 で、熱応力による球面収差変動のうち、(A) は電気変位ベクトルが子午面内に垂直な偏光によるもので、(B) は電気変位ベクトルが子午面内にある偏光によるものである。

計算結果によると、熱応力による球面収差変動は、 $\partial n/\partial \theta$ による球面収差変動と比較して、かなり小さい。さらに、熱応力による偏光の影響は、(A) と (B) の差をとることによって推定することができ、それは熱応力による収差変動全体よりも 1 桁程度小さいことがわかる。

実際、式 (76) において、第 3 項のみ \vec{d} の成分を含んでいて偏光に依存するが、通常 $0 < c_1 < c_2$ なので、 $|c_1 - c_2| < |c_2|$ であり、また $|d_i| < 1$ より、第 3 項は第 2 項よりも小さくなり、内部応力による収差変動のうち、偏光の影響は小さいことが推定できる。前記の計算例で、第 3 項を無視した場合、Table 1 において、10 割、7 割、5 割、3 割の収差変動は、それぞれ、 $-0.00631 \mu\text{m}$ 、 $-0.00660 \mu\text{m}$ 、 $-0.00673 \mu\text{m}$ 、 $-0.00681 \mu\text{m}$ となり、偏光の影響がある場合と比較して、大きく変わらないことがわかる。

なお、複屈折のない場合、式 (43)、(44) で分割数 200 で計算した結果と、光線方程式をルンゲ・クッタ法で解く方法¹⁰⁾ で計算した結果の差は 0.5% 以内であることがわかった。したがって、複屈折がある場合において本論文で述べた方法で計算しても、計算誤差はその程度であることが推定される。

7. ま と め

本報告により、従来示されていなかった応力性の複屈折で、gradient index 光線追跡の方法を提案した。また、具体的な計算例を示した。

応力分布のあるガラスを層状に近似した場合、各層に入射するごとに電気変位ベクトルの方向が互いに垂直な

2つの偏光に分離することになり、層が多くあるために、光線の本数が2の層状枚乗だけの本数となり、実質的に、ガラスを透過後は光線とならずに光束となると考えられる。

しかし、ガラス内で、応力分布が不連続な値をもたず連続となる場合、gradient index も連続となる。したがって、ガラス内を光線が透過するときに、電気変位ベクトルの方向は連続的に変化し、ガラスを出た光線の本数は、空気からガラスに入射するときに屈折したときの2本の偏光そのままであると考えられても十分であるとして、ここでは評価をした。実際、第6章で示した計算例でも問題のない評価となっている。

今後、偏光の分離を厳密に追跡しなければならないような評価が必要となると、今回の方法では、ほぼ無限といえる莫大な数の光線を追跡しなければならず、今後の課題である。

文 献

- 1) ボルン・ウォルフ：光学の原理III（東海大学出版会，1976）p. 980.
- 2) ボルン・ウォルフ：光学の原理III（東海大学出版会，1976）pp. 999-1000.
- 3) ボルン・ウォルフ：光学の原理 I（東海大学出版会，1976）p. 169.
- 4) 溝畑 茂：数学解析（朝倉書店，1973）p. 162.
- 5) D. T. Moore: "Ray tracing in gradiet index media," J. Opt. Soc. Am., **65** (1975) 451.
- 6) ボルン・ウォルフ：光学の原理III（東海大学出版会，1976）pp. 1026-1029.
- 7) ボルン・ウォルフ：光学の原理III（東海大学出版会，1976）p. 984.
- 8) M. C. Simon: "Ray tracing formulas for monaxial optical components," Appl. Opt., **22** (1983) 354-360.
- 9) ボルン・ウォルフ：光学の原理III（東海大学出版会，1976）p. 972.
- 10) A. Sharma, D. V. Kumar and A. K. Ghatak: "Tracing rays through graded-index media: A new method," Appl. Opt., **21** (1982) 984-987.