光波の電磁界解析法

小 柴 正 則

光通信，光情報処理，光計測など，光学の分野のさまざまな技術の進展，高度化にともなって，光波の振舞いを厳密に計算する電磁界解析法に対する関心と期待が高まっている．電磁界解析を必要とする光波問題は多岐にわたるが，本特集号で取り上げられている周期回折格子，光導波路，光ディスクのピットや溝の問題は，実用的見地からも電磁界解析のニーズが高いものである．これらの問題への具体的なアプローチの仕方については，解説論文[1-3]を参考にしていただくことにして，ここでは，光波の電磁界解析に共通することがらを整理しながら，関連する解析法の基本的な特徴について述べる．

さて，光波の電磁界解析は，まずそのための道具選び，すなわち解析法の吟味から始まる．最近は，電磁界解析ソフトウェアを使用する機会も増えてきているが，解きたい問題が本当に解けるかどうかは電磁界解析法そのものに依存する．したがって，解きたい問題の性格をよく把握し，それに見合った解析法を選択する必要がある．特に解析ソフトウェアでは，解析法自体はブラックボックスになっていて，外からは見えにくくなっていることが多いので注意を要する．また，解析ソフトウェアに搭載されている解析法の名称がわかったとしても，解析法ごとにいろいろなバージョンがあり得るので，その解析法が使う側の要求仕様に合致しているかどうかをきちんとチェックしたうえで，解析ソフトウェアの導入を検討することが肝心である．

以下，こうしたチェック項目に対応させながら，光波の電磁界解析法を二，三紹介する．

北海道大学大学院工学研究科電子情報工学専攻（〒060-8268 札幌市北区北 13 条西 8 丁目）
E-mail: koshiba@ice.eng.hokudai.ac.jp

1. 時間領域解析と周波数領域解析

光波の電磁界解析の分野ではこれまで，連続光，いわゆる CW 光を対象とした研究が一般的で，解析も周波数領域で実施されることが多かった．ところが，最近の超高速光エレクトロニクスの進展にともない，超短光パルスを取り扱う機会が増え始め，本質的に時間領域解析を必要とする問題が多くなってきた．

こうした光波の超高速現象を，マクスウェルの方程式を基本式として直接時間領域解析する方法の開発は，伝統的な周波数領域解析法と比べてかなり立ち遅れており，現状では，時間，空間の離散化にいずれも差分法（finite difference method: FDM）を用いる時間領域差分法（FD-time domain method: FDTD）が唯一といって過言ではなかろう．FDM は微分方程式中の導関数を差分商に置き換えて離散化方程式を導出するもので，微分方程式の古典的な数値解析法のひとつとしてよく知られている．詳細は解説論文[4]を参考にしていただきたい．なお，FDTD の生みの親は Yee[5]である．また，Taflove のグループは，非線形媒質中を伝搬する数十フェムト秒クラスの超短光パルスの FDTD 解析に関して先駆的な研究を展開している[6]．

ところで最近，空間の離散化に有限要素法（finite element method: FEM）を用いた時間領域有限要素法（FETD）の開発も進められている[7]．FEM とは，微分方程式を直接解くかわりに，それに対応する汎関数の極値問題を解くことによって微分方程式の解を求めようとするもので，古典的な変分法の一種である[8]．ただし，この汎関数の極値問題を解くには，解析空間全体に対して試験関数というものを想定しなければならず，実際的な光波問題の場合，こうした試験関数の選択そのものが困難になる．そこで FEM では，まず解析空間を要素と呼ばれる小領域に分割して，その一つ一つに変分法を適用し，それぞれの要素

に対する離散化方程式，いわゆる要素方程式を導く．このとき，試験関数は要素ごとに，すなわち区分的に設定される．こうして導かれた要素方程式をすべての要素について重ね合わせ，解析空間全体に対する離散化方程式，いわゆる全体方程式を組み立てる．このように空間を細く分割すると，分割されたそれぞれの要素の中では，電磁界の変化はそれほど大きくはないであろうから，比較的単純な試験関数を用いたとしても，要素内における電磁界の変化をかなり精度よく記述することができる．なおFEMでは，電磁界を要素内に配置された節点における電磁界の値で展開するが，これは通常の変分法にはないFEMのひとつの大きな特徴であり，このため，要素ごとに得られた離散化方程式を節点のところで接続していくことによって解析空間全体に対する離散化方程式を組み立てることができることになる．

FEMは，解析空間を細く分割するという点では，FDMとよく似ているが，数学的基礎は全く違っており，似て非なるものの典型である．時間領域解析にもFEMが使えるようになると，FDTDで問題となる解析空間の形状や，それに付随するメッシュ形状に対する制約は大幅に緩和される．FEMは周波数領域解析法として定評のあるものであるが，FETDとしての研究はまだこれからといったところである．この理由はいろいろ考えられるが，そのひとつとして，特に3次元問題解析用の自動メッシュ生成アルゴリズムが十分に整備されていないことが指摘されており[7]，今後の研究が期待されている．

2. 解析空間

解析空間が1次元あるいは2次元であれば，解析的に取り扱うことができる光波問題は少なからずある．ところが3次元になると，境界条件の複雑さから，FEMやFDMなどのような数値解析法に頼らざるを得ない場合が多くなる．3次元問題のFEM解析やFDM解析では，当然のことながら計算規模が大きくなりがちであるが，幸いなことに，FEM行列やFDM行列はスパース性とバンド性をあわせもっているので，さまざまな高速行列計算アルゴリズムを利用することができる．

ところで，計算規模を原理的に小さくできる方法の開発も進められており，ここでは，その代表的なものとして，境界要素法（boundary element method: BEM）とビーム伝搬法（beam propagation method: BPM）を紹介する．

BEMは解析空間に関する微分方程式を境界積分方程式に置き換え，これを数値的に解くために，FEMと同様な離散化法を導入したものである．したがって，3次元問題は2次元に，2次元問題は1次元に解析空間の次元が1つ下がり，計算規模は大幅に縮小される．ただし，BEM行列にはスパース性やバンド性はない．光波解析の分野では，周期回折格子，光導波路，微小レンズなどの問題に応用されている．

BPMは光導波路解析法のひとつとして開発されたもので，光波の伝搬方向には緩慢変化包絡線近似（slowly varying envelope approximation: SVEA）を用いて，実質的な解析空間を光導波路の断面とする．すなわち，3次元導波路であれば2次元解析，2次元導波路であれば1次元解析を伝搬方向に繰り返しながら，導波光の変化や空間的な発展を逐次的に求めていく．詳細は解説論文[2]を参考にしていただくことにするが，導波モードと放射モードを一体化して取り扱うことができ，また，計算規模も，3次元問題であれば2次元解析を伝搬方向に繰り返すという意味で2.5次元程度，2次元問題であれば1.5次元程度の問題に縮小されるので，伝搬方向に構造が変化する光導波路の解析にはきわめて有効である．伝搬方向の離散化には，基本的にFDMが用いられるが，伝搬方向と垂直な解析空間の離散化には，高速フーリエ変換（fast Fourier transform: FFT），FDM，FEMが用いられ，それぞれFFT-BPM，FD-BPM，FE-BPMと呼ばれている．こうしたBPMは現在，光導波路デバイスの解析設計に不可欠になっており，解析ソフトウェアも市販されている．また，さまざまなBPMのベンチマークテストの結果も報告されている[9,10]．

ところで，BPMはきわめてパワフルな光導波路解析法のひとつであるが，反射波を考慮することが一般に困難であり，これが唯一の弱点である．このため，反射波の評価が必要な場合には，時間領域解析を行う積極的な理由がなくても，前述したFDTDを利用することがある．しかしFDTDでは，安定な解析を行うために，時間および空間の刻み幅を十分小さくしなければならない．こうしたことから最近，時間項にSVEAを導入し，時間の刻み幅に対する制約を大幅に緩和した時間領域BPM（TD-BPM）と呼ばれる方法の開発も進められている[11,12]．ただし，この場合には，3次元導波路の解析空間はそのまま3次元，2次元導波路のそれは2次元となるので，BPMの特徴のひとつが失われる．双方向BPMと呼ばれる方法も開発されている[13]が，自己無撞着に解を収束させるための反復計算を必要とする．最近，こうした反復計算を必要としない非反復BPMが開発された[14]．この方法は，適用範囲に制約はあるものの，BPMの特徴を保存しており，実際，光ファイバーグレーティングの3次元解析にも成功していることから，

適用範囲の拡大を図ることができれば有力な解析法のひとつになり得ると考えられる.

3. ベクトル問題とスカラー問題

光波は電磁波であり,ベクトル波動である.したがって,基本的にはフルウェーブ解析が要求されるが,光波問題では,本質的にスカラー波動の問題に置き換えることができたり,ある条件のもとではスカラー波動の問題に近似しても差し支えない場合が少なくない.スカラー波動としての取り扱いが許されると,解析法の選択の幅は一挙に広がる.一方,ベクトル波動としてフルウェーブ解析することが本質的な場合には,対応可能な解析法はかなり限られ,一般的には数値解析法を利用することになる.

ところで,FEM はベクトル問題にもスカラー問題にも利用できるが,フルウェーブ解析では,スプーリアス解と呼ばれる非物理的な解が発生することが問題であった.こうしたスプーリアス解の除去法に関する研究は 1980 年代に集中的に行われ,ペナルティ法やエッジ要素法と呼ばれる方法が開発されたことによって,現在は全く問題なく安心して使える状況になっている[15].

4. 開領域問題と閉領域問題

解析空間が閉じている閉領域問題の電磁界解析は比較的容易であるが,解析空間が無限に広がっている開領域問題では,無限領域の処理が問題となる.特に周波数領域解析においては,外向放射条件を満たすようにかなり厳密な処理が要求される.

一例として,FEM 解析における無限領域の処理法を紹介すると,光波問題に実際に利用されたものとして,無限要素法,等角写像法,解析的方法などがある.無限要素法は無限領域を外向放射条件を満たす無限要素で分割し,これを通常の有限要素と接続するものである.また,等角写像法は無限領域を有限領域に等角写像変換し,全領域に通常の有限要素を適用するものである.いずれも FEM の特徴である行列のスパース性とバンド性を維持しているが,一般に計算精度に難がある.これに対して,無限領域を解析的に取り扱う方法では,高精度な解析が可能であるが,行列のスパース性やバンド性は失われる.このように,FEM 解析における無限領域の処理法には一長一短がある.なお,BEM は境界積分方程式を基本式としているため,もともと無限領域の処理は得意であり,FEM と BEM とを結合した方法も考案されている.

一方,時間領域解析においては,こうした無限領域の処理は比較的容易で,例えば FDTD 解析用に開発された Mur の吸収境界条件[16]がよく知られている.これは大変性能が良く,この改訂版も含めて長い間広く利用されてきたが,最近,完全整合層[17] (perfectly matched layer: PML) と呼ばれる格段に性能が高い吸収条件が開発され,現在 FDTD 解析では,ほとんどこの PML が用いられている.PML パラメーターを適切に設定することによって,解析領域端からの不要反射をほぼ完全に抑圧できる.これはちょうど,電波吸収体の役割を担うもので,まさに仮想電波暗室,あるいは数値風洞ならぬ,数値電波暗室ができたことになる.幸い,この PML は周波数領域解析にも使えることがわかってきたので,FEM への搭載も急ピッチで進んでいる.また,光導波路解析のための BPM においても,従来からの透明境界条件[18] (transparent boundary condition: TBC) に加えて,PML の使用が試みられ始めている.

5. 物質の性質

解析空間を構成する物質の性質も,解析法を選択するうえでの重要なファクターになる.物質の性質は,一般に

- 等方性媒質と異方性媒質
- 均質媒質と不均質媒質
- 無損失媒質と損失媒質
- 非分散性媒質と分散性媒質
- 線形媒質と非線形媒質

のように大別される.当然のことながら,等方性で均質,そして損失も分散性もなく線形の媒質が最も取り扱いやすく,こうした性質が失われるごとに問題は複雑になり,対応できる解析法も限られてくる.

物質の性質に最も柔軟に対応できるのが,おそらく FEM であろう.FEM には,曲辺要素と呼ばれる要素も用意されているので,物質境界が湾曲していても,例えば光ファイバーのように断面が円形のものでも忠実にモデル化できる.また,グレーデッド型光ファイバーのように屈折率が連続的に変化していても,その要素内変化を忠実に評価できる.ただし,分散性媒質の取り扱いには注意を要する.周波数領域解析の場合には,各周波数ごとに材料定数を変更して計算すればよいが,時間領域解析の場合には工夫が必要である.一般的には,周波数の関数になっている分散式を逆フーリエ変換し,これをコンボリューションの形で時間領域解析の定式化に組み込んで処理する.

6. 連成問題

光波問題の電磁界解析においては,電磁界解析のみならず,連成問題として,他の物理系の解析が必要な場合もあ

る．例えば，電気光学効果，音響光学効果，熱光学効果などを利用する場合がその典型で，それぞれ電界解析，応力・ひずみ解析，熱解析が要求される．これらの問題を解析するための方法にもさまざまなものがあるが，とりわけ FEM がよく利用されている．

光波の振舞いを電磁界解析しようとした場合の問題の切り口を整理し，それぞれの切り口ごとに標準的な解析法を二，三紹介した．ここで取り上げた解析法はごく限られたものであり，光波の電磁界解析法には，このほかにもいろいろあるので，本特集号の解説論文[1-4]を参考にしていただきたい．

ところで，解析法を選択する場合のいまひとつの重要なファクターに計算精度と計算時間とがある．精度保証されていれば申し分ないが，現状ではなかなか難しい．あまり計算精度にとらわれすぎて計算時間がかかるようでは，計算・設計コストが膨大になる．電磁界解析法の開発側あるいは提供側は解析法の適用範囲を明確にすることはもちろんのこと，どの程度の計算でどの程度の精度が保証されるかの目安くらいは使用者側に提示できるように努力すべきであろう．また，電磁界解析法は，まさに問題が与えられてそれを解く道具であり，いわば順問題のためにある．しかし，設計という立場からは，所望の特性を実現する構造・材料パラメーターを決定する逆問題が重要である．ただし，これは解の一意性の問題もあって一筋縄ではいかない．したがって，次善の策ではあっても，現状では順問題を繰り返し計算して，こうしたパラメーターを抽出することが現実的である．このためには，超高速計算が可能な解析法が必要である．

文　　献

1) 松田豊稔，奥野洋一：“周期回折格子の電磁気解析”，光学，**27** (1998) 626-631.
2) 薮　哲郎，沢新之輔：“光導波路の解析法”，光学，**27** (1998) 632-639.
3) 小嶋敏孝，何　一偉：“光ディスクの案内溝および記録マークによる光ビーム散乱の数値解析”，光学，**27** (1998) 640-646.
4) 市川裕之：“時間領域差分法—光学分野への応用を期待して—”，光学，**27** (1998) 647-654.
5) K. S. Yee: “Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equation in isotropic media,” IEEE Trans. Antennas Propag., **AP-14** (1966) 302-307.
6) R. M. Joseph and A. Taflove: “FDTD Maxwell's equations models for nonlinear electrodynamics and optics” (invited paper), IEEE Trans. Antennas Propag., **45** (1997) 364-374.
7) J.-F. Lee, R. Lee and A. Cangellaris: “Time-domain finite-element mothods” (invited review paper), IEEE Trans. Antennas Propag., **45** (1997) 430-442.
8) 小柴正則：“有限要素法の考え方”（小特集），電気学会雑誌，**112** (1992) 781-784.
9) M. Koshiba and Y. Tsuji: “A wide-angle finite element beam propagation method,” IEEE Photonics Technol. Lett., **8** (1996) 1208-1210.
10) M. Koshiba and Y. Tsuji: “Finite element beam propagation method with perfectly matched layer boundary conditions,” IEEE Trans. Magn., submitted for publication.
11) P.-L. Liu, Q. Zhao and F.-S. Choa: “Slow-wave finite-difference beam propagation method,” IEEE Photonics Technol. Lett., **7** (1995) 890-892.
12) G. H. Jin, J. Harari, J. P. Vilcot and D. Decoster: “An improved time-domain beam propagation method for integrated optics components,” IEEE Photonics Technol. Lett., **9** (1997) 348-350.
13) P. Kaczmarski and P. R. Lagasse: “Bidirectional beam propagation method,” Electron. Lett., **24** (1988) 675-676.
14) 辻　寧英，小柴正則：“グレーティング光導波路の非反復ビーム伝搬法”，電子情報通信学会論文誌，**J81-C-I** (1998) 89-93.
15) B. M. A. Rahman, F. A. Fernandez and J. B. Davies: “Review of finite element methods for microwave and optical waveguides,” Proc. IEEE, **79** (1991) 1442-1448.
16) G. Mur: “Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time domain electromagnetic field equations,” IEEE Trans. Electromagn. Compat., **EMC-23** (1981) 377-382.
17) J.-P. Berenger: “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” J. Computat. Phys., **114** (1994) 185-200.
18) G. R. Hadley: “Transparent boundary condition for the beam propagation method,” Opt. Lett., **16** (1991) 624-626.

（1998 年 6 月 24 日受理）