■光学工房——

レンズを裏返しても焦点距離が変わらない理由

虫眼鏡を裏返して使っても拡大された像が見える．対称なレンズなら当然であるが，非対称な平凸レンズでも同じで，裏返しても焦点距離は変わらない．これは自明のことではない．実際，逆向きに使えば収差は変わるからレンズに表裏がないという意味ではない．しかし，焦点距離だけは変わらない．それはなぜかということが本稿の主題である．もちろんこれはどの幾何光学の本にも述べられている事実であるが，ここでは，教科書ではほとんど採り上げられることのない相反性の観点からこの問題を考えてみたい．

焦点距離が問題であるから，話は近軸光学に限られる．Fig. 1 は，光学系の物体側，像側の主点 H，H′ および焦点 F，F′ を図示したものである．物体空間，像空間の屈折率を n，n' とすると，像側焦点距離 f' と物体側焦点距離 f の間に

$$\frac{n'}{f'}=-\frac{n}{f} \tag{1}$$

の関係が成り立つ．とくに，両空間の屈折率が等しいとき，物体側から見た焦点距離と像側から見た焦点距離は符号を除いて一致する．負符号は座標系の取り方によるもので，物体側から見て凸レンズであれば，像側から見ても凸レンズである．本題に入る前に一言．式（1）は結構大事な法則だと思うのだが名前がついていない．この関係式を発見した人物が判明していないということだろうか．

初めに，光学の参考書ではどのように扱われているか調べてみよう．最も初等的な方法は，単レンズの焦点距離を与えるレンズメーカーの式によるものである．確かに，第１面と第２面の曲率を入れ替えても焦点距離は変わらないことが一見してわかる．しかし，これは一般的な証明にはなっていない．

多くの光学の参考書が採用している光学系のシステム行列を使って近軸光学を論じる方法では，両空間の焦点距離を計算で求めると式（1）が得られる[1]．この導出においては，システム行列の行列式が1になることが本質的な役割を果たす．Fig. 1 をじっと睨んで直接証明することもできる[2]．ボルン・ウォルフ[3]では，縦倍率と横倍率の関係式を，射影変換の一般論と近軸光学系の保存量の考察から別々に求め，両者を比較するという間接的な方法で式（1）を証明している．

さて，ここからが本論であるが，アイコナールについての知識が必要になる．物体側および像側のそれぞれの光軸上に，必ずしも共役ではない２点をとり，これらを物体空間と像空間の原点とする．原点から光軸に垂直にそれぞれ x および x' 座標軸をとる．１本の光線が座標軸を横切る点の座標を x，x'，この方向への方向余弦を L，L' とする．光線が光軸となす角度を u，u' とすると，$L=\cos(\pi/2-u)=\sin u$，$L'=\sin u'$ である．屈折率と方向余弦の積 nL を光学的方向余弦と呼ぶ．この光線の x の点から，

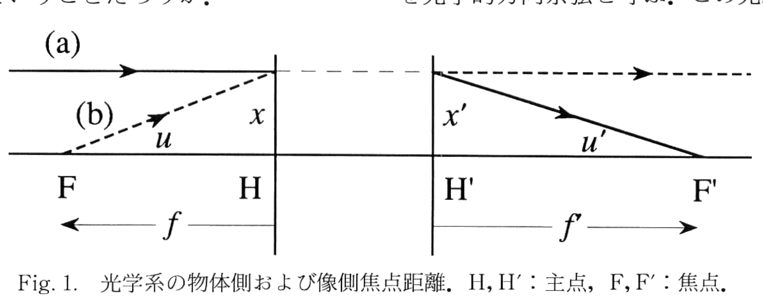

Fig. 1.　光学系の物体側および像側焦点距離．H, H′：主点，F, F′：焦点．

x' の点までの光路長を点アイコナールと呼ぶ．これを $S(x, x')$ と書こう．こうすると，点アイコナールの微分に対して

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -nL, \quad \frac{\partial S}{\partial x'} = n'L' \qquad (2)$$

が成り立つ．x（あるいは逆向きに考えて x'）を固定すると，点アイコナール（＝光路長）は波面の位相を与え，式（2）は光線は波面に直交するという事実を表したものと解釈できる．そこで，式（2）をもう一度微分すると，二重偏微分の順序を入れ替えてもよいことから

$$\frac{\partial^2 S(x, x')}{\partial x \partial x'} = -\left[\frac{\partial(nL)}{\partial x'}\right]_x = \left[\frac{\partial(n'L')}{\partial x}\right]_{x'} \qquad (3)$$

が得られる．ここで，右下の添字は，偏微分をとるときに固定すべき変数を明示したものである．この関係式は，物体側である制約をもって光線を少し動かしたときの変化と，像側で制約をつけて光線を変化させた場合のそれぞれの変化率が(符号を除いて)等しくなることを述べている．この関係を相反性または相反定理という[4]．相反性は物体空間の量と像空間の量を直接結びつける関係式であり，式（1）との関連性に気づかれるであろう．

ただし式（1）の証明には点アイコナールよりも角アイコナールのほうがわかりやすい．再び物体空間から像空間に至る光線を考えよう．原点から光線に垂線を下ろす．物体空間における垂線の足を起点として，像空間における垂線の足まで測った光線の光路長を角アイコナールと呼ぶ．角アイコナールは光学的方向余弦の関数であり $W(nL, n'L')$ と書く．角アイコナールに対する相反定理は，結果だけ記すと

$$\frac{\partial^2 W(nL, n'L')}{\partial(nL)\partial(n'L')} = \left[\frac{\partial x}{\partial(n'L')}\right]_{nL} = -\left[\frac{\partial x'}{\partial(nL)}\right]_{n'L'} \qquad (4)$$

となる．式（3）と比べると，分子分母が入れ替わっただけのようであるが，固定すべき変数が異なっていることに注意されたい．この相反定理を近軸光学の範囲で光軸上の光線（$x=nL=x'=n'L'=0$）に適用しよう．式（4）の $\left[\frac{\partial x}{\partial(n'L')}\right]_{nL}$ は nL を固定して $n'L'$ を変えたときの x の変化率を意味する．これは，物体空間で光線を光軸に平行に保ちつつ移動するということであり，Fig. 1 の (a) の光線に対応する．この光線は像空間で，像側の焦点 F′を通過する．物体側における光線の高さを x，像側において光線が光軸となす角度を u' とする．この比 x/u' は，符号を考慮すると，$-f'$ に他ならない．よって，$\left[\frac{\partial x}{\partial(n'L')}\right]_{nL} \approx -\frac{f'}{n'}$ と評価できる．同様に，$\left[\frac{\partial x'}{\partial(nL)}\right]_{n'L'}$ の計算は物体と像を入れ替えるだけであるから，Fig. 1 の光線 (b) に対応し，$-f/n$ となる．以上の結果を，式（4）に入れれば，ずばり式（1）が得られる．レンズを裏返しても焦点距離が変化しないのは，相反性の帰結なのである．

他のアイコナールの場合も重要な結果が得られる．式（3）の点アイコナールの場合に得られる面白い結果を Walther が論じていることを付記しておく[5]．最後に疑問をひとつ．望遠鏡や双眼鏡は逆さまに使うと縮小された像が見える．これは相反性とどう両立するのだろうか．

この記事に関するご意見は itoh@bk.tsukuba.ac.jp までお願いします．

文　献

1）辻内順平：光学概論 I（朝倉書店，1979）p. 112.
2）三宅和夫：幾何光学（共立出版，1979）p. 44.
3）ボルン，ウォルフ（草川，横田訳）：光学の原理 I（東海大学出版会，1974）p. 228（原著第 4 版，p. 166）.