

単峰性正規分布交叉を用いた 実数値遺伝的アルゴリズムによる光学系の最適化

小野 功・小林 重信*・吉田 幸司**

遺伝的アルゴリズム (genetic algorithm; GA)^{1,2)} は、生物の進化にヒントを得た汎用の最適化の枠組みであり、近年、強力な最適化手法として注目されている。GA は、現在レンズ設計の最適化手法として主流となっている DLS (damped least squares) 法³⁾ にはないさまざまな特徴をもち、以下の点で DLS 法では困難であった問題を解決できる可能性を秘めている。

- 1) ランダムな初期解から大域的にすぐれたレンズを見ることができる (大域的最適化)
 - 2) 複数の評価基準同時に最適化したい場合、あらかじめ評価基準間のウェイトを設定しなくても、トレードオフの関係にある複数のレンズを一度の探索で列挙できる (多目的最適化)
 - 3) 離散値変数である材質と連続値変数である曲率および面間隔を同時に最適化できる (混合最適化)
 - 4) 大域的にすぐれた解を複数列挙できる (代替案列挙)
- 本稿では、筆者らの研究成果^{4,5)}を中心に、特に GA による光学系の大域的最適化および多目的最適化にスポットを当て解説する。

1. 遺伝的アルゴリズム

GA は生物の進化過程を模倣した工学的モデルであり、概念図を図 1 に示す。一般的なアルゴリズムは以下のとおりである⁶⁾。

1. 初期集団の生成 (Generation of Initial Population)

徳島大学工学部知能情報工学科 (〒770-8506 徳島市南常三島2-1)

E-mail: isao@is.tokushima-u.ac.jp

*東京工業大学大学院総合理工学研究所 (〒226-8502 横浜市緑区長津田町 4259)

**(株)ニコン (〒140-8601 東京都品川区西大井 1-6-3)

複数の個体 (解候補) を生成し、初期集団とする。

2. 複製のための選択 (Selection for Reproduction)
親となる個体を集団から選ぶ。
 3. 子の生成 (Generation of Children)
親に交叉・突然変異を適用し、子 (新しい解候補) を生成する。
 4. 生存のための選択 (Selection for Survival)
現世代の集団中の個体と 3. で生成された子から個体を選び、次世代の集団に登録する。
 5. 終了条件を満たすまで、2. ~ 4. を繰り返す。
- GA の設計項目は、コード化/交叉設計と世代交代モデル設計に大別される。コード化/交叉設計は、個体の表現法と新しい個体の生成法 (ステップ 3) の設計であり、問題領域に依存する。非線形性の強い数値最適化となる光学系設計の場合、数値変数を扱える必要があり、特に変数間の依存関係を考慮することが重要となる。一方、世代交代モデル設計は、親の選択法 (ステップ 2) と次世代へ残す個体の選択法 (ステップ 4) の設計であり、ここを工夫することにより、多目的最適化問題において複数のトレードオフの関係にある解集合を一度に探索できるようになる。
- なお、GA についてより詳しく知りたい読者は、教科書^{1,2,7)}などを参照していただきたい。

2. 問題設定

本稿では、レンズ系の設計仕様として焦点距離 f 、F ナンバー F 、画角 $2w$ を所与とし、レンズの曲率 c_i 、面間距離 d_i を最適化することを考える。ガラスの屈折率、レンズの枚数 N は、あらかじめ与えることにする。絞りは、最大画角の光束における上限と下限の光線が光軸に対して対称になる位置に置くものとする。絞り位置は、新しい c_i と d_i が与えられるたびに、再探索される。

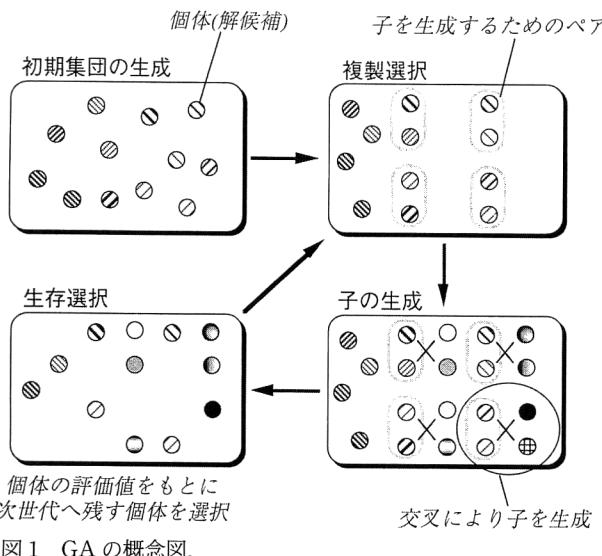


図1 GA の概念図。

レンズ系は、主光線を中心とした合計 11 本の光線を、 0° , $0.65w^\circ$, w° の 3 通りの入射角でレンズ系に通して作成した 3 つのスポットダイアグラムを用いて評価する。評価基準としては、歪曲 (distortion: D) と解像度 (resolution: R) を考える。ここでは、色収差は考慮しない。歪曲 D は、理想的な結像位置 ($f \tan \theta$; θ は入射角) と主光線の像点との距離で与えることとする。解像度 R は、主光線の像点からのその他 10 本の光線の像点の散らばり具合を標準偏差で与えることとする。

$$D = \sum_{W \in \{0, 0.65w, w\}} \sqrt{(x_0 - x_{ideal})^2 + (y_0 - y_{ideal})^2}$$

$$R = \sum_{W \in \{0, 0.65w, w\}} \sqrt{\sum_{k=1}^{10} [(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2] / 10}$$

ここで、 (x_{ideal}, y_{ideal}) は理想的な結像位置、 (x_0, y_0) は主光線の像点の位置、 (x_k, y_k) はその他の 10 本の光線の像点の位置を表すものとする。

3. 光学系最適化のための GA の設計

光学系最適化問題は、基本的に、数値を最適化の対象とする関数最適化問題である。その特徴としては、変数間の強い依存関係、膨大な数の局所解、複数の評価基準などがあげられる。そのため、GA を適用し成功をおさめるためには、設計の際にそれぞれの特徴を十分考慮する必要がある。本章では、コード化/交叉については変数間の依存関係を考慮した実数ベクトル/UNDX⁸⁾、世代交代モデルについては膨大な数の局所解を考慮した minimal generation gap (MGG)⁶⁾ および複数の評価基準を考慮した非パレート解淘汰戦略 (pareto optimal selection strategy; POSS)⁹⁾ を紹介する。

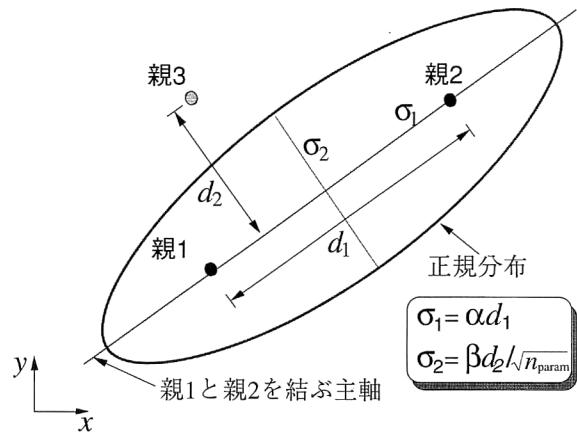


図2 単峰性正規分布交叉(UNDX) (2変数の場合)。

3.1 コード化/交叉：実数ベクトル/UNDX

染色体のコード化として実数ベクトル表現を採用する。個体は曲率と面間距離を $[-1000, 1000]$ の区間で正規化したもの要素とするベクトル $(c_1, c_2, \dots, c_{2N}, d_1, d_2, \dots, d_{2N})$ (N : レンズ枚数) で表される。

交叉としては、単峰性正規分布交叉 (unimodal normal distribution crossover; UNDX)⁸⁾ を採用する。UNDX は、両親の周辺に正規分布に従って 2 つの子を生成する。それぞれの子は、多様性維持のため両親の中点に対して対称の位置に生成される。正規分布の標準偏差は両親を結ぶ主軸方向の成分を両親 (親 1 と親 2) 間の距離に比例させ、それ以外の副軸の成分を主軸と第 3 の親 (親 3) の距離に比例させる。副軸の成分については、 $1/\sqrt{n_{param}}$ (n_{param} : 次元) をかける。これにより、次元によらず、探索空間において現世代で個体が分布している領域に探索を限定できるようになる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{m} + z_1 \mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^{n_{param}} z_k \mathbf{e}_k, & \mathbf{c}_2 &= \mathbf{m} - z_1 \mathbf{e}_1 - \sum_{k=2}^{n_{param}} z_k \mathbf{e}_k \\ \mathbf{m} &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / 2 \\ z_1 &\sim N(0, \sigma_1^2), z_k \sim N(0, \sigma_2^2) (k=2, \dots, n_{param}), \\ \sigma_1 &= \alpha d_1, \sigma_2 = \beta d_2 / \sqrt{n_{param}}, \\ \mathbf{e}_1 &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) / |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|, \quad \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j \\ (i, j &= 1, \dots, n_{param}; i \neq j) \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は親 1 と親 2 の位置ベクトル、 \mathbf{c}_1 と \mathbf{c}_2 は子 1 と子 2 の位置ベクトル、 d_1 は親 1 と親 2 の距離、 d_2 は親 3 から親 1 と親 2 を結ぶ直線までの距離、 α と β はユーザーが与える定数であり、推奨パラメータは $\alpha=0.5$, $\beta=0.35$ である^{8,10)}。2 变数の場合を図 2 に示す。具体的な実装方法は付録を参照されたい。

UNDX により生成される子は、必ずしも実行可能性および設計仕様を満たすものではない。すなわち、焦点距離を満たさなかったり、入射した光線が像面まで届かなかつ

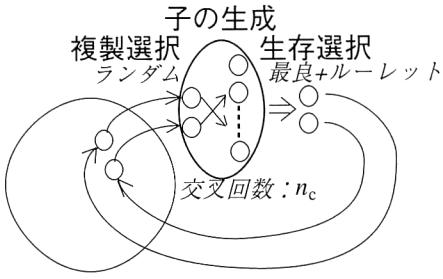


図3 世代交代モデル：MGG.

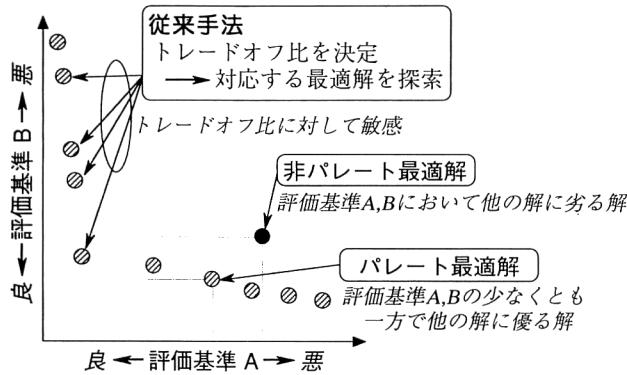


図4 多目的最適化とパレート最適解.

たりする。焦点距離 f については、近軸計算の結果より、所与の f を満たすように、レンズの最終面 c_{2N} および最終面から像面までの距離 d_{2N} を修正する。入射した光線が像面まで届かない場合は、評価不能なため破棄している。

一般的な GA の教科書^{1,2)}では、多くの場合、0, 1 のビットストリング表現によるコード化と、その上で定義された一点交叉 (one point crossover) などが標準的に紹介されている。しかし、光学系最適化のような困難な関数最適化問題に適用した場合、解の精度が得られないことが知られている¹¹⁾。また、実数ベクトル表現をコード化として用いた実数値 GA^{8,11-13)}が提案され、ビットストリングに基づく従来の GA よりも性能が格段に向かることが報告されているが^{11,13)}、従来の実数値 GA では変数間の依存関係が考慮されておらず、光学系最適化問題のような非線形性の強い関数に適用した場合、極端な性能劣化が観察される^{8,13)}。これに対し、筆者らの提案した UNDX を用いた実数値 GA は、変数間の依存関係を考慮しており、非線形性の強い光学系最適化問題において有望な手法であると考えられる。

3.2 世代交代モデル

3.2.1 評価基準が単一の場合：MGG

光学系最適化のように膨大な局所解が存在する問題において、GA が大域的にすぐれた解を発見するためには、なるべくすぐれた個体を十分にバリエーションを保ちながら集団中に保持しておくこと、すなわち多様性維持が重要と

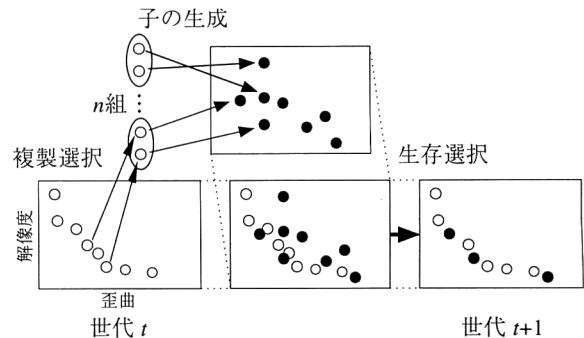


図5 世代交代モデル：POSS に基づくモデル.

なる¹⁴⁾。

ここでは、多様性維持にすぐれた世代交代モデルとして minimal generation gap (MGG)⁶⁾を採用する。MGG の概念図を図3に示す。集団中からランダムに2個体を選んで n_c 回交叉を行うことにより $2n_c$ 個の子を生成した後、親子の個体のうちから最良の1個体と、最良1個体を除く $2n_c - 1$ 個体からランクに基づくルーレット選択により選んだ1個体を集団中に戻することで世代交代を行う。ランクに基づくルーレット選択とは、与えられた $2n_c - 1$ 個体の集合において、評価値の良い順に並べた後、上から $2n_c - 1, 2n_c - 2, \dots, 1$ と点数をつけていき、その点に比例した確率で個体を選択する方法である。

3.2.2 評価基準が複数の場合：POSS

DLS 法により複数の評価基準を最適化する必要がある場合、各評価基準のウェイトをあらかじめ決めて1つの評価関数にまとめる必要がある。ここで、所望の性能をもつレンズ系を得るために適切なウェイトを設定する必要があるが、あらかじめ適切な値を知ることはできないため試行錯誤が必要となる。これに対し、GA のもつ「解候補の集団による探索」という特徴を生かすと、ウェイトを複数回変えて探索した際に得られる解候補を一度の探索で求めることができる。ここで、他のすべての解に対して、少なくとも1つの評価基準においてすぐれている解のことをパレート最適解¹⁵⁾とよび、多目的最適化問題における合理的な解であるといえる（図4）。

ここでは、パレート最適解集合を求めるための世代交代モデルとして、非パレート解淘汰戦略 (pareto optimal selection strategy; POSS)⁹⁾に基づくモデルを採用する（図5）。POSS では、集団からランダムに n 組を選択して交叉を行うことにより $2n$ 個の子を生成し、生成された子を現集団と合わせてパレート最適個体⁷⁾でない個体を淘汰し、パレート最適個体のみを次世代の集団とする。ここで、パレート最適個体とは、個体集合中の他のすべての個体に対して、少なくとも1つの評価基準においてすぐれて

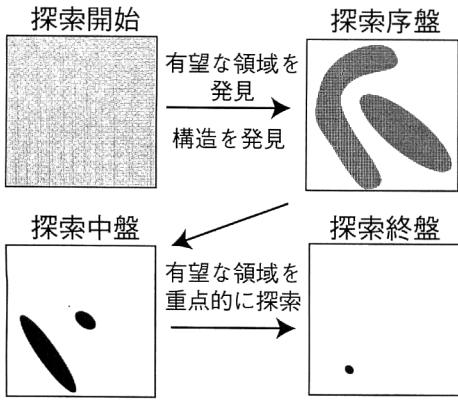


図 6 UNDX を用いた実数値 GA による探索のシナリオ (探索空間における個体分布の時間的推移)。

いる個体のことである。これにより解像度と歪曲のトレードオフ比を設定することなく、陽に多目的最適化を行うことができる。

4. UNDX を用いた実数値 GA による探索過程の可視化

UNDX を用いた実数値 GA による探索の振る舞いを一言でいうと、適忾的なモンテカルロ法といえる。通常のモンテカルロ法は、探索空間全体を一様にサンプリングするが、UNDX を用いた実数値 GA は現在の集団の分布に従ってサンプリングする領域を適忾的に変化させる。したがって、図 6 に示すような効率的な探索が可能と考えられる。

図 7 は、非線形性の強い Rosenbrock 関数と多峰性かつ非線形性をもつ Rotated Rastrigin 関数の等高線図を示している。これらの関数の最小化問題は、大域的探索手法のベンチマーク問題として広く知られる。UNDX と MGG を組み合わせた実数値 GA (UNDX+MGG) を適用した際に、1 回の探索中に全探索期間を通じてサンプリングされた点をプロットしたものを図 8 に示す。探索効率の観点から、有望な領域をなるべく重点的にサンプリングすることが望ましい。Rosenbrock 関数においては最適解 (1, 1) へ続く放物線状の急峻な谷に沿って、Rotated Rastrigin 関数においては大域的最適解である原点付近の局所解周辺を重点的にサンプリングできていることがわかる。すなわち、関数の形状に応じて適忾的に重点的にサンプリングする領域を発見できていることがわかる。

レンズ設計において、DLS 法のみで大域的に最適化することが困難な理由は、周知のとおり、強い非線形性と多峰性の探索空間をもつためである。したがって、レンズ設計には、この 2 つの特徴をもつ空間において効率よく探索

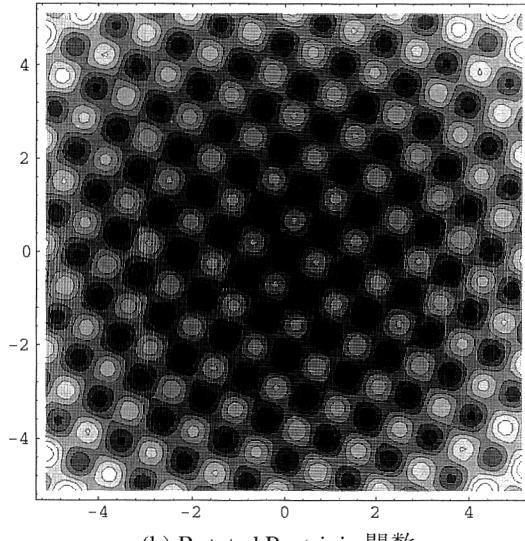
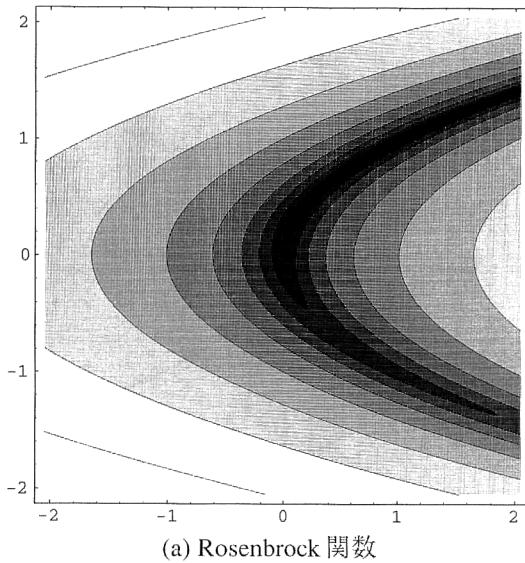


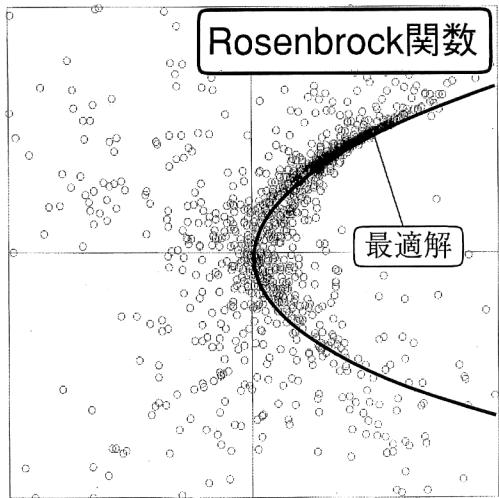
図 7 関数最適化におけるベンチマーク問題(等高線図)。
(a) Rosenbrock 関数, (b) Rotated Rastrigin 関数。

できる手法が望まれ、UNDX を用いた実数値 GA は本要件を満たしているといえる。

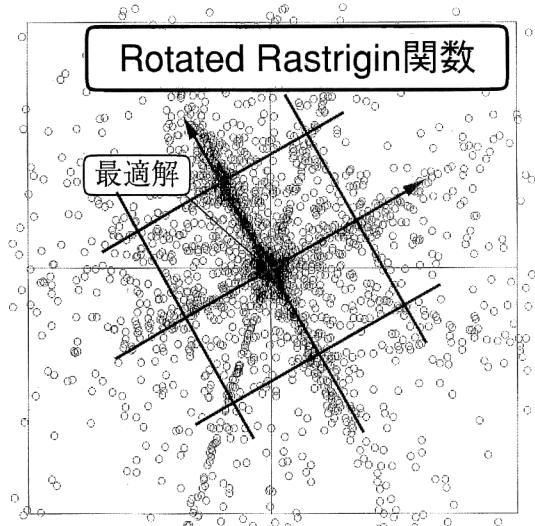
5. UNDX を用いた実数値 GA による設計例

5.1 単一の評価基準の下での最適化

ここでは、従来のレンズ自動設計と同様に、歪曲 D と解像度 R のトレードオフ比を与えて線形結合することによりスカラーの評価関数 $R+D$ を設定する。コード化/交叉として実数ベクトル/UNDX、世代交代モデルとして MGG を用いた実数値 GA (UNDX+MGG) が専門家の知識に頼らずに大域的に良好な設計解を発見できることを実験的に示す。以下のすべての実験において、集団サイズ



(a) Rosenbrock 関数



(b) Rotated Rastrigin 関数

図 8 1回の探索中に生成された個体の分布. (a) Rosenbrock 関数, (b) Rotated Rastrigin 関数.

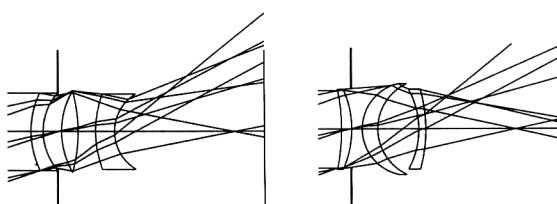


図 9 3枚組レンズ系の初期解の例.

は 100 とした。

まず、3枚組レンズ系の最適化を行う。設計仕様は焦点距離 $f=100\text{ mm}$, 明るさ $F/3.0$, 画角 $2w=38^\circ$ とした。実験は、図 9 に示すようなランダムなレンズからなる初期集団からはじめて、 4.0×10^6 個のレンズを評価した段階

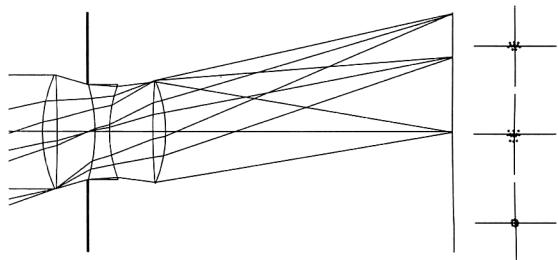


図 10 3枚組レンズ系の設計例($f=100\text{ mm}$, $F/3.0$, $2w=38^\circ$).

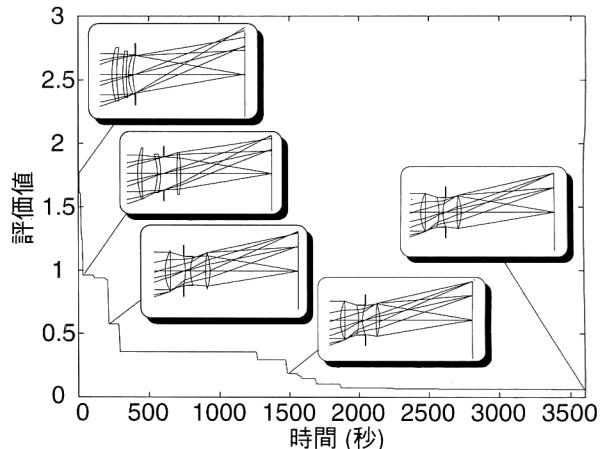


図 11 3枚組レンズ設計問題における探索の様子。

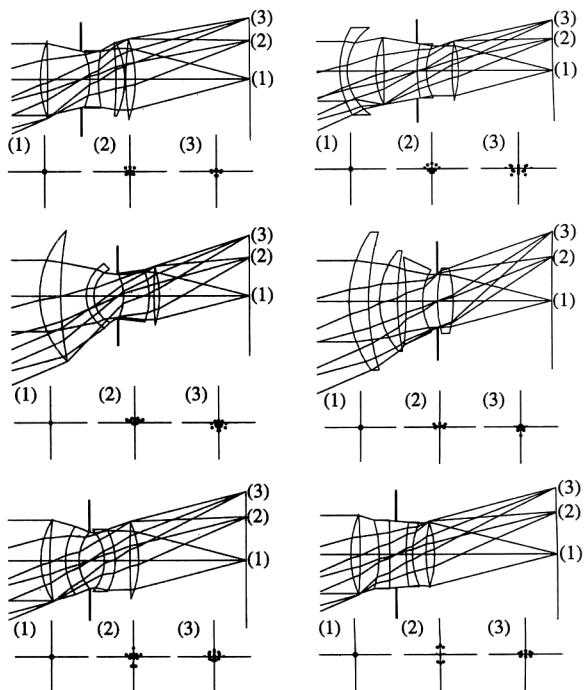


図 12 4枚組標準レンズの設計例.

で打ち切りとした。得られたレンズ形状とスポットダイアグラムを図 10 に示す。スポットダイアグラムは $\pm 0.5\text{ mm}$ の範囲で表示してある。Pentium 200 MHz 搭載の

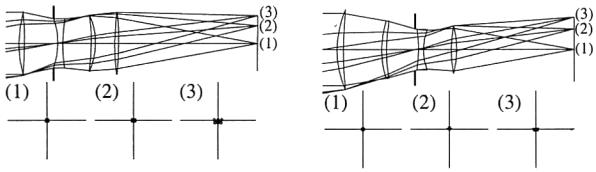


図13 4枚組望遠レンズの設計例。

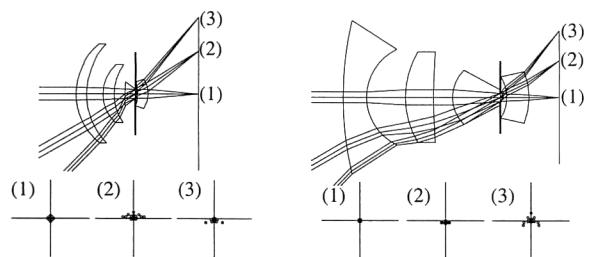


図14 4枚組広角レンズの設計例。

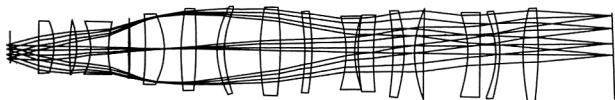


図15 15枚組投影レンズの設計例。

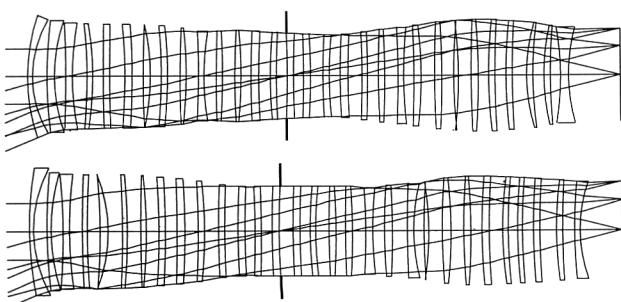


図16 30枚組標準レンズの設計例。

PC (OS: Solaris 2.5.1, GNU C++コンパイラーを使用) 上での典型的な収束曲線とレンズ型の推移を図11に示す。

次に、4枚組レンズ系の最適化を行う。設計仕様としては、1) 標準： $f=50\text{ mm}$, $F/2.0$, $2w=46^\circ$, 2) 望遠： $f=135\text{ mm}$, $F/2.8$, $2w=18.2^\circ$, 3) 広角： $f=20\text{ mm}$, $F/5.6$, $2w=92^\circ$ の3通りで実験を行った。3枚組のときと同様に、ランダムなレンズ形状から探索を開始し、評価回数は 1.0×10^6 で探索を打ち切った。得られたレンズ形状とそのスポットダイアグラムの例を図12～14に示す。

比較的大規模な15枚組投影レンズの設計例と30枚組標準レンズ ($F/2.0$, $f=50\text{ mm}$, $2w=46.0^\circ$) の本手法による設計例を、それぞれ図15、図16に示す。最適化すべきパラメーター数は、15枚組レンズが60、30枚組レンズが120である。また、図17に30枚組標準レンズに本手法を適用した際の探索過程の例を示す。これより、大規模な問

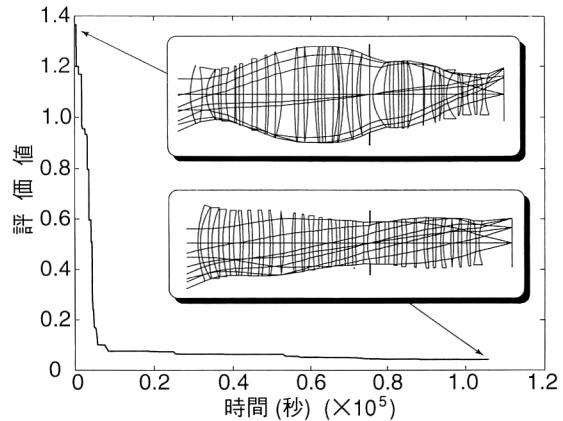


図17 30枚組標準レンズ設計問題における探索の様子。

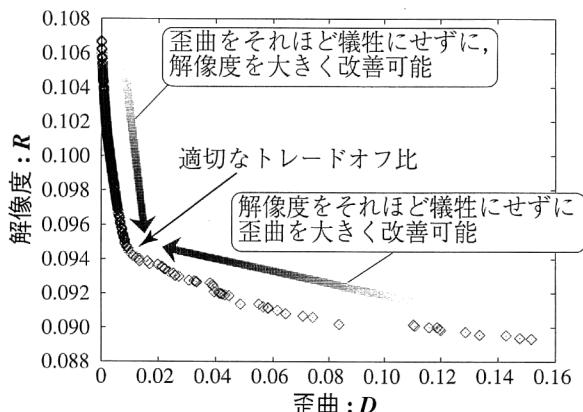


図18 1回の探索で得られた3枚組レンズ系の評価値のプロット。

題においても、本手法は有効に働くことがわかる。

5.2 複数の評価基準の下での最適化

本節では、2つの評価基準 R , D を陽に扱い、トレードオフの関係にある複数の設計解を直接探索することが、コード化/交叉として実数ベクトル/UNDX、世代交代モデルとしてPOSSを用いた実数値GA (UNDX+POSS)により実現できることを実験的に示す。

3枚組のレンズ ($F/3.0$, $f=100\text{ mm}$, $2w=38.0^\circ$) の設計に、UNDX+POSSを適用して得られたパレート解集合を歪曲-解像度の平面にプロットした結果を図18に示す。得られたパレート解は750個のトリプレットである。

図18より、ある値までは歪曲を犠牲にせずに解像度の改善が行えるが、それより先では歪曲を犠牲にしても解像度の改善が難しいことがわからることから、その境界付近のレンズ系を選択することが望ましいと考えられる。しかし、このような適切なトレードオフに関する情報はあらかじめ知ることはできないことから、従来手法では適切なトレードオフ比の発見のため、膨大な試行錯誤が必要となる。これに対し、本手法を用いれば一度の探索で適切なト

レードオフに関する情報を得ることができ有効である。

本稿では、GAによる光学系の大域的最適化および多目的最適化にスポットを当て筆者らの研究成果を紹介した。

現在、本稿で紹介したGAによる光学系の大域的最適化、多目的最適化に関する研究のほか、連続値変数と離散値変数を扱えるように拡張したUNDX+MGGを用いた曲率、面間隔、材質の同時最適化に関する研究も行っており、比較的良好な結果を得つつある¹⁶⁾。また、複数個の有望な設計解を列举するための世代交代モデルも開発中である。今後は、ズームレンズをはじめ、さまざまなレンズ設計問題にGAを適用し、その有効性を示すとともに、知見を集積していきたいと考えている。

本稿で紹介したUNDXを用いた実数値GAを含む関数最適化のためのGAのソフトウェアパッケージをWWW(<http://www-ono.is.tokushima-u.ac.jp/member/isao/index-jp.html>)にて公開しているので、興味をもたれた読者はぜひダウンロードして試してみてほしい。

文 献

- 1) D. E. Goldberg: *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning* (Addison-Wesley Publishing Company Inc. Massachusetts, 1989).
- 2) J. H. Holland: *Adaptation in Natural and Artificial Systems* (The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975).
- 3) R. R. Shannon: *The Art and Science of Optical Design* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- 4) 小野 功、立沢嘉宏、小林重信：“遺伝的アルゴリズムによるレンズ系の多目的最適化”，第22回光学シンポジウム（光学技術・学術講演会）資料（1997）pp. 29-32.
- 5) 小野 功、小林重信、吉田幸司：“遺伝的アルゴリズムによる大規模レンズ系の大域的最適化”，第23回光学シンポジウム（光学技術・学術講演会）資料（1998）pp. 5-8.
- 6) 佐藤 浩、小野 功、小林重信：“遺伝的アルゴリズムにおける世代交代モデルの提案と評価”，人工知能学会誌，12（1997）734-744.
- 7) 三宮信夫、喜多 一、玉置 久、岩本貴司：遺伝アルゴリズムと最適化（朝倉書店, 1998）。
- 8) I. Ono and S. Kobayashi: “A real-coded genetic algorithm for function optimization using unimodal normal distribution crossover,” *Proc. 7th Int. Conf. on Genetic Algorithms* (1997) pp. 246-253.
- 9) 小林重信、吉田幸司、山村雅幸：“GAによるパレート最適な決定木集合の生成”，人工知能学会誌，11（1996）264-272.
- 10) H. Kita, I. Ono and S. Kobayashi: “Theoretical analysis of the unimodal normal distribution crossover for real-coded genetic algorithms,” *Proc. 1998 IEEE Int. Conf. on Evolutionary Computation* (1998) pp. 529-534.
- 11) L. Davis: *The Handbook of Genetic Algorithms* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1990).
- 12) L. J. Eshelman and J. D. Schaffer: “Real-coded genetic algorithms and interval-schemata,” *Foundations of Genetic Algorithms*, 2 (1993) 187-202.
- 13) I. Ono, M. Yamamura and S. Kobayashi: “A genetic algorithm with characteristic preservation for function optimization,” *Methodologies for the Conception, Design, and Application of Intelligent Systems, Proceedings of IIZUKA '96*, (1996) pp. 511-514.
- 14) 山村雅幸、小林重信：“遺伝的アルゴリズムの工学的応用”，人工知能学会誌，9（1994）506-511.
- 15) 市川惇信編：多目的意志決定の理論と方法（計測自動制御学会, 1980）。
- 16) 小野 功、立沢嘉宏、小林重信、吉田幸司：“色収差を考慮したレンズ系の進化的設計”，第24回光学シンポジウム（光学技術・学術講演会）資料（1999）pp. 33-36.

付録 UNDX の実装

UNDXの実装においては、両親 \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 を結ぶ軸方向以外は分布が等方的であることに着目して、以下のようなアルゴリズムにより子 \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 を生成している。

- (1) $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{n_{\text{param}}})$ を生成する。ここで、 $t_i \sim N(0, \sigma_2^2)$, $\sigma_2 = \beta d_2 / \sqrt{n_{\text{param}}}$, d_2 は第3の親 \mathbf{p}_3 と両親 \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 を結ぶ軸との距離, n_{param} は次元数, β は定数である。
- (2) \mathbf{t} から両親を結ぶ軸方向の成分を引く。

$$\mathbf{t} \leftarrow \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1$$

ここで、 \mathbf{e}_1 は両親を結ぶ軸方向の単位ベクトル $(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) / |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|$ である。

- (3) 正規分布 $N(0, \sigma_1^2)$, $\sigma_1 = \alpha d_1$ に従い、両親を結ぶ軸方向の成分の大きさ s を求め、 $s \mathbf{e}_1$ を \mathbf{t} に加える。

$$\mathbf{t} \leftarrow \mathbf{t} + s \mathbf{e}_1, s \sim N(0, \sigma_1^2)$$

ここで、 d_1 は両親間の距離 $|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|$, α は定数である。

- (4) 上で求めた \mathbf{t} を用い、子 \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 を求める。

$$\mathbf{c}_1 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / 2 + \mathbf{t}, \mathbf{c}_2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / 2 - \mathbf{t}$$

（1999年8月18日受理）