

特異値分解を用いた光インターコネクションのアライメント解析

成瀬 誠, 石川 正俊

東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻 〒113-8656 文京区本郷 7-3-1

Alignment Analysis for Optical Interconnections Based on Singular Value Decomposition

Makoto NARUSE and Masatoshi ISHIKAWA

Department of Mathematical Engineering and Information Physics, Graduate School of Engineering, University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656

We propose a theoretical method to analyze and characterize the alignment of optical systems by using singular value decomposition (SVD) technique. SVD based mathematical approach has the potential to be the foundation on which complex optical systems where tremendous number of parameters are specifying the property of alignment are analyzed as well as providing a useful design criterion for deriving optimum optical systems. One application is to identify critical parameters for alignment systematically when aligning two-dimensional device arrays. Other example is to characterize the sensitivity or accuracy of detection capability of misalignment based on the ratio of the singular values of optical system. Another application is the characterization of optical systems including the dynamical properties. The information obtained through SVD based techniques can be used to construct optical systems where attention is carefully paid to critical parameters so that the alignment of the overall system is properly satisfied.

1. はじめに

自由空間光インターコネクションは、チップ間、ボード間等のデータ通信能力を著しく高め、電気配線による信号遅延やスキュー、バンド幅不足等の問題を解決する技術¹⁾として注目を集めているが、受光素子の大きさや、光線の直径は数十 μm 以下であり、素子間の光線の高精度かつ安定したアライメントが、光システム実現に向けての重大な課題となっている^{2,3)}。あらかじめ振動等の外乱に頑健なシステムを構築する受動的アライメント^{4,5)}や、デバイスの位置・姿勢等を環境の変化に準じて適応的に制御する能動的アライメント⁶⁾に大別される実装技術が提案されている。一般に、光学系のアライメントは、Fig. 1に抽象されるように、システムを構成する各素子の位置・姿勢の自由度や光源の波長等の膨大な数のパラメーターに依存している。したがって、各パラメーターがアライメントに及ぼす影響度を解析し、その影響度に準じた適切な技術を採用したシステムの設計や、ミスアライメントを正確に観測するメカニズムの検討は、全体システムに要求される仕様を

最小のコストで実現する上で重要と考えられる。さらに、考慮すべきパラメーター数が膨大であることから、システムの解析および評価は、対象とするシステムに依存したアドホックな手続きによってではなく、統一の評価基準のもとにシステムティックに実行されることが肝要と思われる。

本論文は、特異値分解 (singular value decomposition (SVD)) と呼ばれる数学的手法を利用し、光学系のアライメントの解析やシステム設計を支援する枠組を提案する。具体的には、SVD を数学的基礎として、アライメントに寄与する重要パラメーターを特定する手法 (3章)、ミスアライメントの検出の正確性を評価する基準 (4章)、光学システムの動特性を含むアライメント評価基準 (5章)、を示した。こうした理論的方法を応用すれば、アライメントに大きく寄与するパラメーターに対しては、高精度なアクチュエーターを用いた能動的アライメント技術を採用し、寄与が小さいパラメーターに対しては、受動的な手法により対応するといったシステム設計指針を得ることができる。

E-mail: naruse@k2.t.u-tokyo.ac.jp

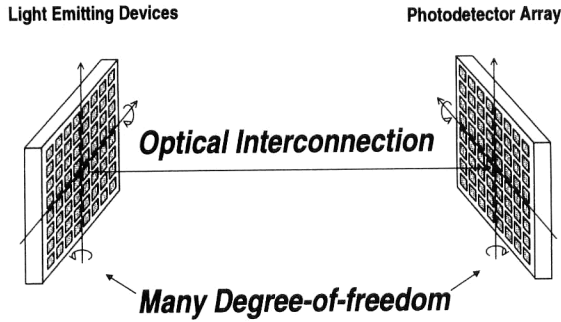


Fig. 1. The alignment problems for 2-dimensional device arrays.

2. 特異値分解 (SVD)

行列 A の特異値分解は、直交行列 U , V , および対角行列 D を用いて, $A=U \cdot D \cdot V^T$ により与えられる⁷⁾. ここで, D の対角要素 σ_i は行列 A の特異値と呼ばれる. 最大特異値と最小特異値の比は, 行列の条件数と呼ばれ, 行列により規定される連立方程式から求められる解の信頼性を評価する指標となる. SVD は行列の階数の決定や線形最小二乗解求解のための信頼性ある手法として定着しており, 制御工学やコンピュータービジョン等において盛んに応用されている^{8,9)}.

3. SVD を用いた重要パラメーターの特定

システムを構成する各パラメーターのアライメントへの寄与の大小を, SVD を用いて導出する理論的枠組, および応用事例を述べる.

3.1 理論

本理論は, 次の4ステップから構成される. (1) システムのモデル化, (2) ミスアライメントの定量的評価のためのアライメント指標の定義, (3) システムの各パラメーターとアライメント指標の微小変化を表すヤコビ行列の導出, (4) ヤコビ行列の特異値分解.

3.2 理論適応例: 自由空間並列光インターコネクション

アレイ状の受光素子に対して光線が入射する自由空間並列光インターコネクションを簡単にモデル化し, 3.1 節の手法を応用して各パラメーターのアライメントへの寄与を解析する.

3.2.1 システムのモデル

並列光インターコネクションの簡単なモデルとして, Fig. 2 に示すように, 間隔 p でアレイ状に配置された一辺の長さ s の正方形の受光素子に, 頂角が Δ である円錐としてモデル化された光線が入射する状況を考える. 空間を伝搬する光線は一般にガウス分布をなすことから, このモ

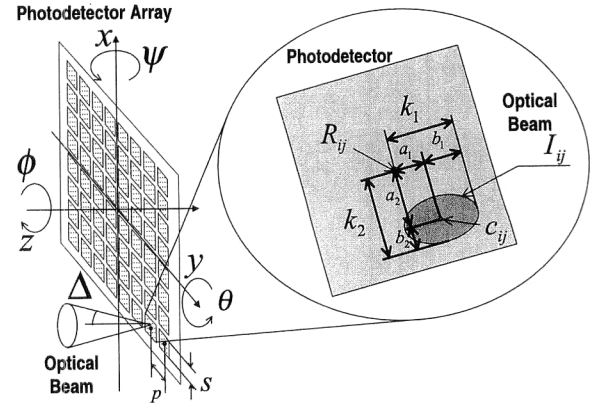


Fig. 2. A modeling of photodetector array and optical beams, and the definition of the alignment index.

デルは物理系を厳密に模擬しておらず, また, 現実の並列光インターコネクションにおいては, レンズ系のミスアライメントや発振波長の変動など他にも考慮すべきパラメーターが存在する. しかし, ここでは特異値分解に基づくアライメント解析手法に焦点を絞るために, 簡単なモデルを採用し, 解析対象とするパラメーターを受光素子アレイの位置・姿勢の6自由度のみとした. アレイ内での各素子を区別する指標として, (i, j) (i, j は, $|i| \leq N, |j| \leq N$ である整数) を与え, 受光素子アレイの位置・姿勢を規定する6自由度を, Fig. 2 に示すように $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c, \psi_c, \theta_c, \phi_c)$ とすれば, 指標が (i, j) である受光素子の中心位置 \mathbf{R}_{ij} は,

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{pmatrix} x_c + ip \cos \phi_c \cos \theta_c + jp (\cos \phi_c \sin \theta_c \sin \psi_c - \sin \phi_c \cos \psi_c) \\ y_c + ip \cos \theta_c \sin \phi_c + jp (\sin \phi_c \sin \theta_c \sin \psi_c + \cos \phi_c \cos \psi_c) \\ z_c - ip \sin \theta_c + jp \cos \theta_c \sin \psi_c \end{pmatrix} \quad (1)$$

で与えられ, この受光素子に入射する光線が空間内に占める領域は,

$$I_{ij} = \{(x, y, z) | (x - ip)^2 + (y - jp)^2 \leq (z \tan \Delta)^2\} \quad (2)$$

と書ける.

3.2.2 アライメント指標

Fig. 2 右に示すように, 受光素子の中心位置 \mathbf{R}_{ij} から, 光線の主軸 (円錐アレイの主軸) と受光素子アレイが構成している平面の交点 \mathbf{c}_{ij} へのミスアライメントを $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, 受光素子面と光線 (円錐) の交線である楕円の大きさを示す指標を $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ とし, ミスアライメントを定量化する指標として, 「アライメント指標」を $\mathbf{k} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ で定義する. $x_c, y_c, z_c, \psi_c, \theta_c, \phi_c$ のおのおのが微小であると近似すれば,

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi j p + \theta z_c - x_c + (-\theta i p + \psi j p + \theta x_c - \phi y_c + z_c) \tan \Delta \\ -\phi i p + \psi z_c - y_c + (-\theta i p + \psi j p + \theta x_c - \phi y_c + z_c) \tan \Delta \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。

3.2.3 ヤコビ行列

各自由度の次元を合わせるために、ベクトル \mathbf{r}_c の各成分を、正規化パラメーター ($n_x, n_y, n_z, n_\psi, n_\theta, n_\phi$) を用い、 $\mathbf{r}_c = (n_x x, n_y y, n_z z, n_\psi \psi, n_\theta \theta, n_\phi \phi)$ として、無次元の成分からなるベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z, \psi, \theta, \phi)$ へ変換する。正規化パラメーターは、各軸に沿った変位の最大値、あるいは各軸に沿った変位の分解能と見なすことができる。式(3)を微分することにより、システムを構成する自由度の微小変化とアライメント指標の微小変化の関係は、

$$J = \begin{pmatrix} -n_x + n_x n_\theta \tan \Delta & , & n_x n_\theta \tan \Delta \\ -n_y n_\phi \tan \Delta & , & -n_y - n_y n_\phi \tan \Delta \\ n_z n_\theta + n_z \tan \Delta & , & n_z n_\psi \psi + n_z \tan \Delta \\ j p n_\psi \tan \Delta & , & n_\psi n_z z + j p n_\psi \tan \Delta \\ n_x n_\theta z + (n_x n_\theta x - i p n_\theta) \tan \Delta & , & (n_x n_\theta x - i p n_\theta) \tan \Delta \\ n_\phi j p - n_\phi n_y y \tan \Delta & , & -n_\phi i p - n_\phi n_y y \tan \Delta \end{pmatrix}^T \quad (4)$$

として、

$$d\mathbf{k} = J d\mathbf{r} \quad (5)$$

と書き下される。ここに、行列 J はヤコビ行列と呼ばれ、受光素子アレイの位置・姿勢を示す \mathbf{r} の微小変化とアライメント指標 \mathbf{k} の微小変化の相互関係を表す。

3.2.4 特異値分解

ヤコビ行列 J は特異値分解により、

$$U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \quad V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_6) \\ D = \begin{pmatrix} D' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D' = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2) \quad (6)$$

として $J = U D V^T$ と分解される。ここに、 $J \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ が成立することから、大きな特異値 σ_i に対応する特異ベクトル \mathbf{v}_i が、アライメント指標に大きな影響を及ぼすことが示唆される。したがって、各自由度のアライメントへの寄与を評価する指標として、ベクトル \mathbf{q} (以後、これを「アライメント評価ベクトル」と呼ぶ) を、

$$\mathbf{q} = \sum_i \sigma_i |\mathbf{v}_i|_e \quad (7)$$

で定義する。ただし、 $|\mathbf{v}_i|_e$ はベクトル \mathbf{v} の成分ごとに絶対値を取る演算とする。アライメント評価ベクトルの各成分の値の大小により、アライメントへの寄与を評価する。

3.3 理論適応例

解析対象とするデバイスの仕様、および正規化パラメーターを、 $\Delta = 6 \text{ deg}$, $p = 250 \mu\text{m}$, $n_x = n_y = n_z = 1 \mu\text{m}$, $n_\psi = n_\theta = n_\phi = 0.01 \text{ deg}$ とした場合について、アライメント評価ベクトルを導出した。ヤコビ行列は、式(4)からわかるように、受光素子アレイ内での素子の位置 (i, j) 、および受光素子アレイの位置・姿勢を規定する自由度 \mathbf{r} に依存して異なる。ここでは、 $i = j = 4$ に対応する素子におけるアライメントを考察の対象とし、ヤコビ行列 J およびアライメント評価ベクトル \mathbf{q} を計算した。受光素子アレイの位置・姿勢を表す6次元空間内で \mathbf{r} を一様に変化させ、おのおのの状態について、ヤコビ行列およびアライメント評価ベクトルを求めた。アライメント評価ベクトルの各成分の平均値は、

$$\mathbf{q} = (1.41 \times 10^0, 1.41 \times 10^0, 1.50 \times 10^{-1}, 2.68 \times 10^{-2}, \\ 2.68 \times 10^{-2}, 2.48 \times 10^{-1})$$

となり、各成分の標準偏差は、

$$(2.00 \times 10^{-4}, 2.00 \times 10^{-4}, 1.80 \times 10^{-3}, 1.2 \times 10^{-3}, \\ 1.2 \times 10^{-3}, 8.00 \times 10^{-4})$$

で与えられた。アライメント評価ベクトルの成分の大きさの比較により、アライメント指標 \mathbf{k} への寄与は、 $x = y > \phi > z > \psi = \theta$ の順に大きいと判断することができる。また、各成分の標準偏差は、アライメント評価ベクトルの各成分に対して相対的に微小であり、想定したシステムにおけるアライメント評価ベクトルは、受光素子アレイの位置・姿勢の変化に対して、ほぼ一定であることがわかる。

3.4 数値シミュレーション

3.1節の理論は、アライメント指標およびヤコビ行列の導出過程において近似計算を採用している。本節では、光学CADを用いた数値シミュレーションにより、理論の示唆した結果を検証する。

3.4.1 システム

想定したシステムは、Fig.3に示される Pössel アイブースと呼ばれる4f光学系であり、結像面に受光素子アレイが設置されると仮定する。この光学系は、同一仕様のアクロマティックレンズの組み合わせで実現される簡単な構成でありながら、歪みおよび波面収差が少なく、自由空間光インターコネクションを用いたシステムにおいても採用されている¹⁰⁾。ここでは、Spindler & Hoyer社の焦点距離40mm、直径18mmのレンズ(型番322209)を用い、光源の広がり角は12度、光源の波長を850nmとした。このシステムの構成は、3.2節のモデルを反映している。

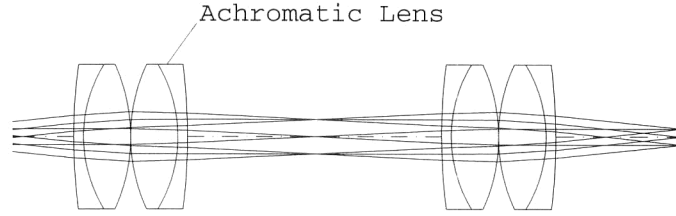


Fig. 3. A schematic of an optical system model used in the simulation.

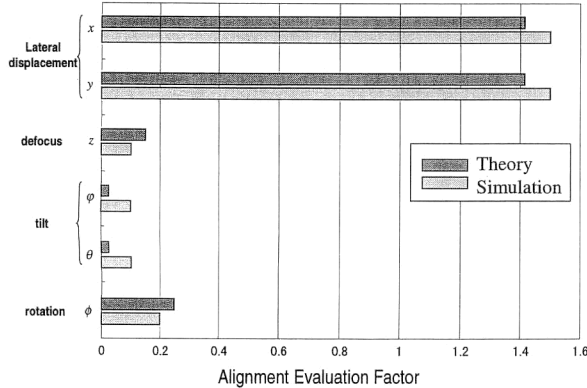


Fig. 4. The alignment evaluation vector derived by theory and simulation.

3.4.2 シミュレーションの手法と結果

受光素子の中心と光線の主光線の位置ずれ \mathbf{a} 、およびビームのスポットサイズ \mathbf{b} を用いて、アライメント指標 $\mathbf{k} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ を構成した。スポットサイズとして、光線追跡の RMS 値を採用し、3.3 節と同様に指標が $i=j=4$ で規定される素子におけるアライメント指標を考察の対象とした。受光素子アレイの位置・姿勢に依存し、ヤコビ行列は異なるが、ここでは、受光素子アレイの位置・姿勢の 6 自由度を 6 次元空間内で一様に変化させ、おのおのの位置・姿勢 \mathbf{r}_i に対応するアライメント指標 \mathbf{k}_i から、

$$E = \sum_i |\mathbf{k}_i - \mathbf{J}\mathbf{r}_i|^2 \quad (8)$$

を最小にする行列 \mathbf{J} としてヤコビ行列を求め、アライメント評価ベクトルを計算した。シミュレーションでは、ヤコビ行列は、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1.0423 & -0.0423 & -0.0423 & -0.0423 & -0.0423 & -0.1316 \\ -0.0423 & -1.0423 & -0.0423 & -0.0423 & -0.0423 & -0.1316 \end{pmatrix}$$

と推定された。アライメント評価ベクトル \mathbf{q} は、

$\mathbf{q} = (1.4740, 1.4740, 0.0598, 0.0598, 0.0598, 0.1861)$ となり、Fig. 4 に示されるように、理論およびシミュレーションから導かれる重要パラメータの評価結果がほぼ同様であることがわかる。

4. SVD を用いた光学システム設計の評価

最大特異値と最小特異値の比を用いて、ミスアライメントの検出の正確性を評価する枠組を示す。

4.1 理論

システムに発生した物理的なミスアライメントをベクトル \mathbf{r} で示し、これを検出するために設置されたセンサーから得られる信号をベクトル \mathbf{s} で与える。いま、行列 \mathbf{S} を用いて、

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{r} \quad (9)$$

が成立する状況を考える。このとき行列 \mathbf{S} がフルランクであれば、 \mathbf{r} を \mathbf{s} により求めることができるが、再現される \mathbf{r} の正確性、あるいは信頼性、すなわち \mathbf{s} に重畳される雑音に対する感度は、 \mathbf{S} に依存して異なる。この信頼度は、行列 \mathbf{S} の最大特異値と最小特異値の比である条件数により見積もることができる。詳しい数学的導出を付録に示す。したがって、システムのミスアライメントを正確に検出するシステム的设计問題は、行列 \mathbf{S} がシステム的设计パラメータ Ω の関数として $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\Omega)$ と書かれる場合に、 σ_i を行列 \mathbf{S} の特異値として、

$$\text{Cond}(\mathbf{S}) = \frac{\max \sigma_i}{\min \sigma_i} \quad (10)$$

を最小とする Ω の探索問題に帰着される。

4.2 理論適応例：4分割ディテクターの配置

ここでは、4.1 節の理論の簡単な応用として、光インターコネクションのミスアライメントを、受光素子アレイの周辺部等に設置した、複数個の 4 分割ディテクターにより検出することを考える。4 分割ディテクターは、平面内で分割された 4 つの受光素子を用いて、光線の位置ずれを検出するためのデバイスである¹¹⁾。3.4 節と同様に、Fig. 3 に示される並列光インターコネクションを想定し、Fig. 5 に示すように、複数個の 4 分割ディテクターを結像面に配置し、受光素子面での光線のミスアライメントを検出することを考える。

複数個の 4 分割ディテクターを指標 i により区別し、4 分割ディテクター i の出力信号を $\mathbf{s}_i = (s_{ix}, s_{iy})^T$ 、中心位置を $\mathbf{p}_i = (p_{ix}, p_{iy})^T$ とする。3 章で導かれた結果を踏まえ、システムのミスアライメントは、光軸に垂直な面内で

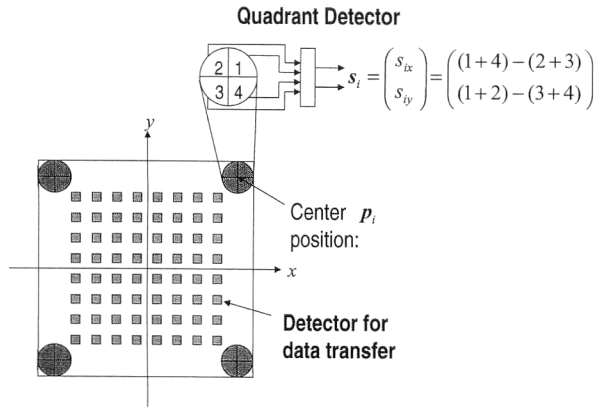


Fig. 5. Quadrant detectors on the detector array.

の横ずれ, および光軸回りの回転のみに支配されると考え, 他の自由度の変動は無視できると仮定し, ミスアライメントを (x_c, y_c, ϕ_c) で表す. ここで, 各成分の無次元化のために, 正規化パラメーター n_x, n_y, n_ϕ を用い, $(x_c, y_c, \phi_c) = (n_x x, n_y y, n_\phi \phi)$ として, 無次元の成分からなるベクトル $\mathbf{r} = (x, y, \phi)$ を与える. 各4分割ディテクターから得られる信号 \mathbf{s}_i をベクトル $\mathbf{s} = (s_{1x}, s_{1y}, \dots, s_{nx}, s_{ny})^T$ とすれば, 式(4)により,

$$S = \begin{pmatrix} n_x & 0 & \dots & n_x & 0 \\ 0 & n_y & \dots & 0 & n_y \\ -p_{1x}n_\phi & p_{1y}n_\phi & \dots & -p_{nx}n_\phi & p_{ny}n_\phi \end{pmatrix}^T \quad (11)$$

として, $\mathbf{s} = S\mathbf{r}$ を得る. したがって, 正確性高く \mathbf{r} を得るための4分割ディテクターの配置を導出することは, 式(11)により与えられる行列 S の条件数を最小とする設計パラメーター $\Omega = (p_{1x}, p_{1y}, \dots, p_{nx}, p_{ny}, n_x, n_y, n_\phi)$ を探索する問題に帰着される.

4.3 理論適応例

いま, 受光素子面で光軸に対称な2か所に配置された4分割ディテクターによりミスアライメントを検出することを考える. いま, $n_x = n_y = 1 \mu\text{m}$ と仮定し, 設計パラメーターの制約条件として, $|p_{xi}| \leq 1 \text{ mm}$, $|p_{yi}| \leq 1 \text{ mm}$ を設ける. Fig. 6は, 2個の4分割ディテクターの中心間の距離, および正規化パラメーター n_ϕ の関数として, 式(11)に基づいて計算された条件数を示す. この図から, n_ϕ の値に応じて, 条件数を最小とする4分割ディテクターの配置は異なることがわかる. 例えば $n_\phi = 0.01 \text{ deg}$ の場合は, 分割ディテクター間の距離を最大とした場合に条件数が最小となる. なお, 2つの4分割ディテクター間の距離を $2/n_\phi \mu\text{m}$ とした場合に, 条件数は最小値1となる.

4.4 数値シミュレーション

CODE Vを用いた数値シミュレーションにより, 4.3節の結果を検証した. 4分割ディテクターからの出力信号

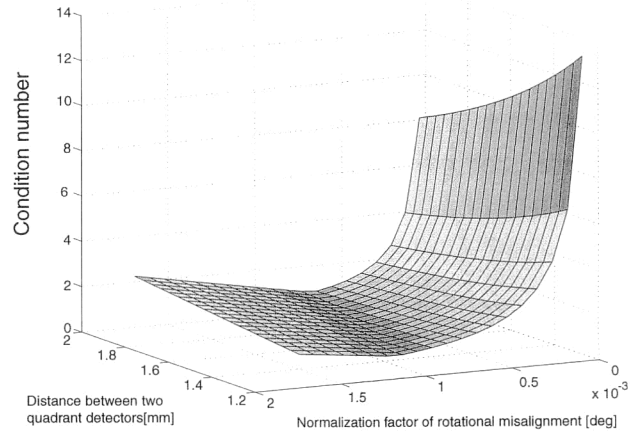


Fig. 6. The condition number as a function of the distance between pair of quadrant detectors and the normalization factor.

Table 1. Distance between two quadrant detectors and its corresponding condition number.

Distance between quadrant detectors [mm]	2	1.5	1
Condition number (Theory)	4.0514	5.4019	8.1028
Condition number (Simulation)	3.4913	4.6228	6.1048
Residual (E)	1.8466	2.6313	4.2198

は, CODE V に標準装備されている4分割ディテクターシミュレーション機能により求めた. ここでは, $n_\phi = 0.01 \text{ deg}$ と仮定し, 受光素子面の位置・姿勢 \mathbf{r} を (x, y, ϕ) で規定される3次元空間で一様に変化させ, 各状態における4分割ディテクターの出力信号 \mathbf{s} を求める. その上で,

$$E = \sum_i (\mathbf{s}_i - S\mathbf{r}_i)^2 \quad (12)$$

を最小にする行列 S を構成し, この行列の条件数によりシステムの性能を評価した. Table 1 にシミュレーション結果を, 理論値および式(12)により与えられる S の推定誤差とともに示した. シミュレーションにより計算された条件数が, 理論と整合している様子が見られる.

5. 動特性の評価

前章までに示した理論では, 光学系やアクティブアライメントのためのアクチュエーターの動特性は考慮されていないが, 実環境下での光インターコネクションにおいては, 制振のためのメカニズムや制御手法が重要となる. 本節では, ロボットシステムにおける動的操作性¹²⁾を光インターコネクションに応用し, ダイナミクスを考慮した光学系解析の一例を提示する. システムの動特性は一

般に、

$$M(\boldsymbol{\tau})\ddot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\tau}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{f} \quad (13)$$

と書かれる。ここで、 $\boldsymbol{\tau}$ は光学システムの自由度、 $M(\boldsymbol{\tau})$ は正則な慣性行列、 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\tau}})$ は遠心力とコリオリ力を表す項、 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\tau})$ は重力を表す項、 \mathbf{f} はアクチュエーターに加えられる力を表す。

いま、光学系の状態を表すパラメーターである $\boldsymbol{\tau}$ に対して、光インターコネクションのアライメントの状態を表すパラメーター \mathbf{r} が、 $\mathbf{r} = P(\boldsymbol{\tau})$ で変化するとする。具体的には、 \mathbf{r} は各光線の結像位置やスポットサイズ等を表す。いま、何らかのセンシングシステムにより、光線のミスアライメントに依存して変化する信号 \mathbf{s} を計測でき、相互の関係が $\mathbf{s} = S(\mathbf{r})$ で求められるとすれば、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= (dS/d\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} \\ &= (dS/d\mathbf{r})(dP/d\boldsymbol{\tau})\dot{\boldsymbol{\tau}} \\ &= KJ\dot{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。ここに、 $K = dS/d\mathbf{r}$ 、 $J = dP/d\boldsymbol{\tau}$ 。さらに、式(14)より、ベクトル \mathbf{a} を K および J の時間微分を含む項として、

$$\dot{\mathbf{s}} = KJ\dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{a} \quad (15)$$

を得る。ここで、 \mathbf{h} 、 \mathbf{g} 、 \mathbf{a} が一定と見なせる場合、 $\ddot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{f} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau})$ 、 $\ddot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{a}$ として、式(13)および式(15)より、

$$\ddot{\mathbf{s}} = KJM^{-1}\ddot{\boldsymbol{\tau}} \quad (16)$$

を得る。すなわち、行列 KJM^{-1} は、アクチュエーターにより与えられる力と、アライメントの状態を反映したパラメーターの加速度の関係を表しており、特異値分解によりアライメントの動的な操作性を評価できる。例えば、この行列の特異値の積 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ は、アライメントの動的な操作性の評価指標となり¹²⁾、この値がシステムの可動範囲内において一様となる設計が望ましい。すなわち、特異値の積を評価基準とすることにより、光学システムのもつダイナミクス(M)、センシングシステム(K)、あるいは光インターコネクションの光学系の構造(J)を適当に調整し、ミスアライメントの動的な調整可能性にすぐれたシステムを構築する枠組を導出できる。

6. 結 論

特異値分解(SVD)を用いた、光学系のアライメントの解析手法を提案した。SVDを用いた手法の一例として、システムのパラメーターのアライメントへの寄与の大きさを導出する理論を示し、簡単なモデルに対して応用した。この理論は、パラメーターのアライメントへの影響度の判定を、特異値を基礎とした数学的手続きに帰着させ、多数の

パラメーターにより構成されるシステムや、より精緻なモデルに基づくシステムに対しても、同様の手続きでの解析手段を提供する。また、ミスアライメントを正確に検出するためのシステム設計において、最大特異値と最小特異値の比を評価基準として導入し、信頼性の高い情報を得るためのメカニズムの設計を支援する枠組を提供した。さらに、システムの動特性を考慮した基本的な枠組を議論した。このように、SVDを基礎とした手法は、膨大なパラメーターから構成される光学システムの評価および設計を支援する有効な手段のひとつと期待でき、自由空間光インターコネクションの実装における最大の困難のひとつであるアライメントの問題の解決に貢献すると考えられる。

文 献

- 1) J. W. Goodman, F. J. Leonberger, S.-Y. Kung and R. A. Athale: "Optical interconnections for VLSI systems," Proc. IEEE, **72** (1994) 850-865.
- 2) V. N. Morozov, Y.-C. Lee, J. A. Neff, D. O'Brien, T. S. McLaren and H. Zhou: "Tolerance analysis for three-dimensional optoelectronic systems packaging," Opt. Eng., **35** (1996) 2034-2044.
- 3) B. Robertson, D. Kabal, G. C. Boisset, Y. Liu, W. M. Robertson, M. R. Taghizadeh and D. V. Plant: "Design and operation of an in situ microchannel alignment-detection system," Appl. Opt., **37** (1998) 5368-5376.
- 4) A. C. Walker, T.-Y. Yang, J. Gourlay, J. A. B. Dines, M. G. Forbes, S. M. Prince, D. A. Baillie, D. T. Neilson, R. Williams, L. C. Wilkinson, G. R. Smith, M. P. Y. Desmulliez, G. S. Buller, M.R. Taghizadeh, A. Waddie, I. Underwood, C. R. Stanley, F. Pottier, B. Voegele and W. Sibbett: "Optoelectronic systems based on InGaAs-complementary-metal-oxide-semiconductor smart-pixel arrays and free-space optical interconnects," Appl. Opt., **37** (1998) 2822-2830.
- 5) D. Miyazaki, S. Masuda and K. Matsushita: "Self-alignment with optical microconnectors for free-space optical interconnections," Appl. Opt., **37** (1998) 228-232.
- 6) G. C. Boisset, B. Robertson and H. S. Hinton: "An approach to active alignment of free-space optical interconnects," *Institute of Physics Conf. Ser. 139: Part I* (1994) pp. 227-230.
- 7) G. H. Golub and C. F. Van Loan: *Matrix Computations* (Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989).
- 8) 伊理正夫, 児玉慎三, 須田信英: "特異値分解とそのシステム制御への応用", 計測と制御, **21** (1982) 763-772.
- 9) K. Hashimoto and T. Noritsugu: "Performance and sensitivity in visual servoing," *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation* (1998) 2321-2326.
- 10) F. B. McCormick, A. L. Lentine, R. L. Morrison, S. L. Walker, L. M. F. Chirovsky and L. A. D'Asaro: "Parallel Operation of a 32×16 symmetric self-electrooptic effect device array," *IEEE Photonics Technol. Lett.*, **3** (1991) 232-234.
- 11) D. C. O'Shea: *Elements of Modern Optical Design* (John

Wiley & Sons, New York, 1985).

- 12) 吉川恒夫：“ロボットアームの動的可操作性”，計測自動制御学会論文集，21 (1985) 84-89.

付録 行列の条件数

$m \times n$ の行列 A により規定される連立一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (17)$$

の解 \mathbf{x} が，右辺のベクトル \mathbf{b} の変動 $\Delta\mathbf{b}$ により， $\Delta\mathbf{x}$ だけ変動したとする。すなわち，

$$A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \quad (18)$$

ここで， A の特異値分解が，

$$A = U \cdot D \cdot V^T$$

$$U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$$

$$V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_m) \quad (19)$$

$$D = \begin{pmatrix} D' & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad D' = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

で与えられるとき，ベクトル $\tilde{\mathbf{x}}$ および $\tilde{\mathbf{b}}$ を

$$\tilde{\mathbf{x}} = V^T \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = U^T \mathbf{b} \quad (20)$$

で定義すれば， U および V は直交行列であるから，

$$\sigma_i \tilde{x}_i = \tilde{b}_i \quad (i=1, \dots, r) \quad (21)$$

$$0 = \tilde{b}_i \quad (i=r+1, \dots, m) \quad (22)$$

であり，したがって，方程式 (17) の解 \mathbf{x} は，

$$\tilde{x}_i = \frac{\tilde{b}_i}{\sigma_i} \quad (i=1, \dots, r) \quad (23)$$

$$\tilde{x}_i = \text{不定} \quad (i=r+1, \dots, m) \quad (24)$$

となる。ここで，不定である \tilde{x}_i ($i=r+1, \dots, m$) をゼロとしたときの解は，方程式 (17) の最小ノルム最小二乗解と呼ばれる。この解を改めて，

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m \xi_j \mathbf{v}_j \quad (25)$$

で与えたとき，式 (19) により，

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^r \sigma_j \xi_j \mathbf{u}_j \quad (26)$$

となることから，

$$\min \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sigma_1}, \quad \max \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sigma_r} \quad (27)$$

$$\min \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sigma_1}, \quad \max \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sigma_r} \quad (28)$$

が成立する。したがって，式 (27) および (28) より，

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_1} \leq \frac{\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}}{\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_r} \quad (29)$$

である。すなわち， σ_1/σ_r により， \mathbf{b} の相対的変動に対する \mathbf{x} の相対的変動の最大値を見積もることができ，行列 A の条件数と呼ばれる。