

Wigner 分布関数を用いた極短パルス光の時空間情報の解析

須藤 泰範*・安野 嘉晃*・原田 建治*・伊藤 雅英*・森 雅彦**・谷田貝豊彦*

*筑波大学理工学系 〒305-8573 つくば市天王台 1-1-1

**電子技術総合研究所 〒305-8568 つくば市梅園 1-1-4

Analysis of Spatio-Temporal Information of an Ultrashort Pulse Using Wigner Distribution Function

Yasunori SUTOH*, Yoshiaki YASUNO*, Kenji HARADA*, Masahide ITOH*,
Masahiko MORI** and Toyohiko YATAGAI*

*Institute of Applied Physics, University of Tsukuba, 1-1-1, Tennodai, Tsukuba, Ibaraki 305-8573

**Electrotechnical Laboratory, 1-1-4, Umezono, Tsukuba, Ibaraki 305-8568

The spatio-temporal coupling effect in ultrashort light pulse is described by the Wigner distribution function. This approach enables us to calculate the output field intensity profile by defocus and/or combination of the different focal length lens pair in pulse shaper, and to clearly understand spatio-temporal properties of pulse shaping.

1. はじめに

近年のレーザー技術の発展により、フェムト秒の超短パルスレーザーが身近なものになりつつある。これに伴い、通信・医療・計測・精密加工などさまざまな分野へと応用が広がってきている¹⁻⁴⁾。このようなフェムト秒の超短光パルスを利用するためには、フェムト秒オーダーでその制御を行う必要がある。そのため、変調器や検出器などに超高速応答が要求される。現段階ではそのようなデバイスは開発されておらず、直接パルスの時間波形を制御するのは困難である。しかし、フェムト秒パルスが非常に広い周波数スペクトルをもつことを利用し、間接的に振幅や位相といった波形関数を制御することは可能である。その代表的な波形整形器は、回折格子・レンズ対から成る光学系であり、入力パルスのスペクトルを空間軸上に展開し、空間光変調器などで変調を加えて波形関数を制御することができる。

しかし、この波形整形において、時間とスペクトルの変換と同時に回折の効果として時間と空間の相互作用である時空間結合を受けることが報告されている⁵⁻⁷⁾。コヒーレントキャリアコントロールへの応用を例にすると、散乱したプローブ光パルスの時間スペクトルを測定する際に、

時間域の変化に空間域の影響が加わるため、励起されたフォノンモードのスペクトルが重なってしまう。この影響はパルス幅が短くなるにつれて顕著になってくる。極短パルス光を扱う際にはその影響を小さくする必要があるが、また逆にそれを利用することも可能であり⁸⁾、そのためには時空間結合の振る舞いを直感的に理解する必要が生じてきた。

PayneらはWigner分布関数を用い、直感的に時空間結合を理解できることを示した⁹⁾。ここで行われているのは、対称的で系のずれがない波形整形器に関する解析のみであり、非対称的な波形整形器や系にずれのある波形整形器に関する解析は行われていない。こうした状況においては、光パルスの空間パターンも変調されることが予想される。

本論文では、波形整形器にレンズの焦点ずれがある場合と焦点距離の異なるレンズ対による波形整形器の出力光パルスに生じる時空間結合の振る舞いを、Wigner分布関数を用いて定量的に解析する。

2. Wigner 分布関数

Wigner分布関数は、量子力学における位置と運動量といった不確定性関係にある共役な物理量を同時に表すために考案された。これを光波に適用すると、空間と空間周波

E-mail: sutoh@optlab2.bk.tsukuba.ac.jp

数分布, 時間と時間周波数分布といった, フーリエ交換の不確定性の関係にある物理量を同時に表すことが可能となる⁹⁾. ここで, 時間と空間の分布をもつ電場 $E(x, t)$ を考える. このとき, Wigner 分布関数は次のように定義される.

$$W^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E\left(x + \frac{x'}{2}, t + \frac{t'}{2}\right) E^*\left(x - \frac{x'}{2}, t - \frac{t'}{2}\right) \times \exp\{i(-\xi x' + \omega t')\} dx' dt' \quad (1)$$

ここで x は位置, ξ は空間周波数, t は時間, ω は時間角周波数を表す. この分布関数は, ある座標 (x, ξ, t, ω) における光電場の強度を表している. そのため, 式 (1) を ξ や ω で積分することにより, 特定の位置や時間における電場強度分布を得ることができる.

さらに, Wigner 分布関数を用いて電場分布を表すと, ある光学系がその電場に与える作用を入力電場分布の Wigner 分布関数表示から出力電場分布の Wigner 分布関数表示へと線形に変換することができる. たとえば, 入力パルスの電場に対して位相型の変調 $\Phi(x, \xi, t, \omega)$ を加えるような要素 (レンズ, 位相変調器, 分散媒質など) を考えた場合, その偏導関数 $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial \xi$, $\partial\Phi/\partial t$, $\partial\Phi/\partial \omega$ はそれぞれ ξ , x , ω , t の群速度遅延とみなすことができ, 変調を受けた後の Wigner 分布関数の座標は変調を受ける前の座標から群速度遅延の項を引いた形で表される. このため, 線形変換を定式化することにより, 系の振る舞いを直感的に表すことが可能となる¹⁰⁾.

次に光学素子を組み合わせた, より一般的なシステムを考える. この場合, それぞれの素子の作用を表す座標変換行列の積を計算すればシステム全体の座標変換行列を計算することができる. 例として, 光パルスが分散のない空間をレンズの焦点距離 f 伝搬し, レンズを通過後さらに f 伝搬するシステム, すなわち $2f$ 系による空間フーリエ変換のシステム行列を計算すると以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{f}{k_0} & 0 & 0 \\ \frac{k_0}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ t_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで, $(x_1, \xi_1, t_1, \omega_1)$, $(x_0, \xi_0, t_0, \omega_0)$ はそれぞれ入力座標系と出力座標系, k_0 は光の波長を λ_0 としたときに $2\pi/\lambda_0$ で与えられる定数である.

式 (2) において, t と ω は時間域の行列成分が単位行列となっているため, 入力と出力で変化しない. 一方, 空間域においては x と ξ の関係が交換されている. した

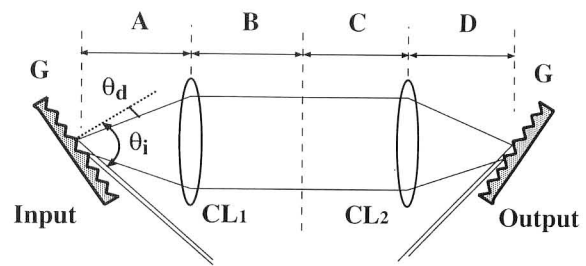


Fig. 1. The schematic set up of a pulse shaper. CL₁, CL₂; cylindrical lens, G; grating, θ_i ; incident angle, θ_d ; diffraction angle.

がって, この行列は空間におけるフーリエ変換作用を表していることがわかる.

同様に, 回折格子と $2f$ のフーリエ変換系を組み合わせた分光器に用いられる系のシステム行列を計算すると以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha f}{k_0} & 0 & 0 \\ \frac{k_0}{\alpha f} & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & \frac{\beta f}{k_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ t_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで $\alpha = \cos\theta_1/\cos\theta_d$, $\beta = 2\pi p/(\omega_0 d \cos\theta_d)$ は回折格子への入射角 θ_1 , 回折角 θ_d , 回折次数 p , 格子間隔 d , 光の中心角周波数 ω_0 によって決まる定数である.

式 (3) より分光器では, 回折により空間フーリエ変換作用以外に, ξ に対する ω の作用や t に対する ξ の作用, すなわち時空間結合が生じていることがわかる.

3. 波形整形器における時空間結合の解析

3.1 理想的な波形整形器の場合

Fig. 1 に示す回折格子・レンズ対から成る波形整形器の出力光に生じる時空間結合を解析する. この系は, 空気中での分散はなく, 回折格子は格子間隔が $d=1/600$ mm でリトロー配置 ($\alpha=1$) をとっている.

系に入力する光パルスは外形が時間・空間ともにガウス型で, 半値全幅がそれぞれ 100 fs および 1 mm, 中心波長 $\lambda_0=749.4$ nm とする. Ti:Sapphire レーザなどのモードロックレーザーでは, 一般的にその時間波形は sech^2 型になる. しかし, ここでは時間波形に関してもガウス型を仮定することで計算を簡単化し, 計算時間の短縮を試みている. 数値計算では, 積分関数の標本点数を 64 点とし, 出力を 32 点 \times 32 点とした. 標本間隔は, 位置と時間ではそれぞれ 0.1 mm および 50 fs, 空間周波数と時間周波数ではそれぞれ位置または時間の標本間隔と標本点数の積の

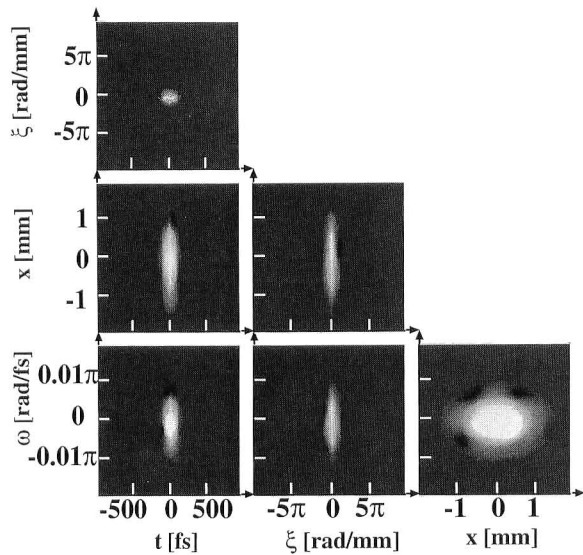


Fig. 2. Output field intensity profile of 4f system. $A=B=C=D=500$ [mm].

逆数に比例するとして、Wigner 分布関数の 4 変数 x, ξ, t, ω のうち 2 変数を積分し、出力される光パルスの電場の強度分布を求めている。

系にずれがない場合 ($A=B=C=D=f=500$ mm), すなわち 4f 系の場合のシステム行列を計算すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ t_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式 (4) において、空間成分 x, ξ については負の単位行列に、時間成分は正の単位行列になっている。そのため、入力波形と出力波形の強度分布に変化は生じないといえる。この場合の出力電場の強度分布を Wigner 分布関数を用いて計算した結果を Fig. 2 に示す。このプロットでは、明るいところ程強度が強く、暗い程強度が弱いことを示している。式 (4) から明らかなように、この場合時空間結合は生じず、入力光パルスの電場分布がそのまま出力されていることになる。

3.2 レンズの焦点ずれがある場合

系を 4f 系からずらした場合 ($A=B=C=f=500$ mm, $D=450$ mm) を考える。このときのシステム行列を計算すると式 (5) となる。

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{50}{k_0} & 0 & \frac{50\beta}{k_0} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50\beta}{k_0} & 1 & -\frac{50\beta^2}{k_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ t_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

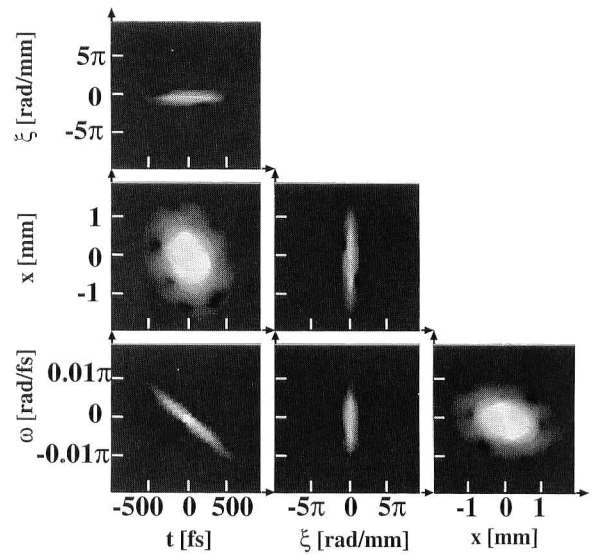


Fig. 3. Output field intensity profile. $A=B=C=500$ [mm], $D=450$ [mm].

式 (5) では、 ξ と ω は入力座標がそのまま出力座標となるのに対し、 x と t では ξ と ω との相互作用が生じて出力座標が変化する。したがって、空間波形と時間波形に時空間結合の影響が生じることが直感的にわかる。この場合の出力電場の強度分布は、Wigner 分布関数を用いて計算すると Fig. 3 のようになる。ずれのない 4f 系の電場強度分布と比べて、 x や ω に時間遅延が生じていることがわかる。この遅延により ω - x 分布に傾きが生じる。また、時間波形にチャープがみられ、その半値全幅は入力光パルスの 4.0 倍に広がっている。このように時空間結合によって時間波形はチャープすることがわかる。式 (5) からは x についても時空間結合が生じていることがわかるが、Fig. 3 の x - ξ 分布は Fig. 2 と同じとなっている。これより、 x については ξ と ω の影響が打ち消し合う関係になっているといえる。そのため、時空間結合の影響が表れないのである。

同様に D が f よりも 10% 長い場合 ($A=B=C=f=500$ mm, $D=550$ mm), システム行列を計算すると式 (6) で表され、出力電場の強度分布を Wigner 分布関数を用いて計算により求めると、時間波形のチャープの方向が D が短いときとは逆である分布が得られる。この時間チャープの方向の違いは式 (5) と式 (6) の x や t に作用する ξ や ω の符号の違いに表れている。

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{50}{k_0} & 0 & -\frac{50\beta}{k_0} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{50\beta}{k_0} & 1 & \frac{50\beta^2}{k_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ t_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

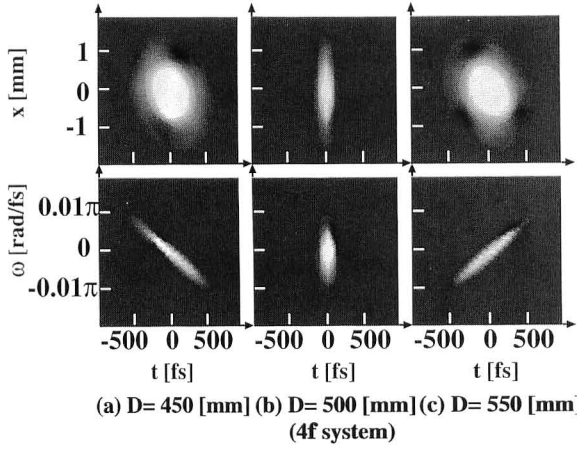


Fig. 4. Output field intensity profile. (a) $D=450$ [mm], (b) $D=500$ [mm], (c) $D=550$ [mm].

これらの結果において、 D を f よりも短くした場合と長くした場合の電場強度分布を比較してみると、Fig. 4 に示すように x - t 分布は同じになり、 t - ω 分布は傾きが変化している。 x - t 分布が同じになるのは、時間チャープの方向が $D < f$ の場合と $D > f$ の場合とで逆になることに加え、空間位置の方向も逆になるためである。また、 t - ω 分布の傾きが変化するのは、時間チャープの方向が逆になるためである。したがって、 $D < f$ の場合には高周波数成分すなわち青色の成分が先に進み、 $D > f$ の場合には低周波数成分すなわち赤色の成分が先に進む。

3.3 焦点距離の異なるレンズを組み合わせた場合

Fig. 1 において $A=B \neq C=D$ 、つまり焦点距離が異なるレンズを組み合わせた場合を考える。まず、 $A=B=500$ mm、 $C=D=400$ mm ($A > C$) の場合、システム行列は式 (7) で表される。

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ t_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式 (7) より、 ξ には ω の影響が、 t には x の影響が表れることが直感的にわかる。Wigner 分布関数を用いて、この場合における出力電場の強度分布を計算した結果を Fig. 5 に示す。4f 系の出力電場強度分布 (Fig. 2) と比較すると、 t と ξ がチャープしているため、 ξ - t 分布や ω - t 分布、 x - ξ 分布は広がりをもっている。これらのチャープはまた、 x - t 分布と ω - ξ 分布にみられるように、 x と ω に遅延を生じさせる。そのため、パルスの前後で到達する場所が異なり、 x - t 分布から光パルスが空間軸上を下から上へと走ることがわかる。また、チャープによって

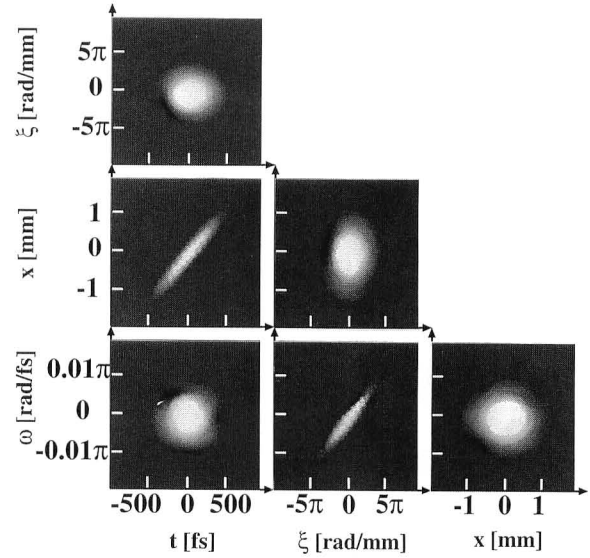


Fig. 5. Output field intensity profile. $A=B=500$ [mm], $C=D=400$ [mm].

波形の半値全幅も変化し、時間波形は入力光パルスの 3.2 倍に、空間周波数波形は 4.0 倍に広がる。空間波形の半値全幅も変化し、入力パルスの 0.8 倍と狭くなっている。これは、焦点距離の異なるレンズを組み合わせたことで、式 (7) からわかるように x が小さくなるためである。

同様に、 $A=B=500$ mm、 $C=D=600$ mm ($A < C$) の場合、システム行列を計算すると式 (8) となる。

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & 0 & -\frac{\beta}{6} \\ \frac{\beta}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ t_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式 (8) と式 (7) を比べると、 ξ に対する ω の作用と t に対する x の作用を表す符号が異なっている。これより、チャープの方向が $A > C$ の場合と反対になることがわかる。この場合、Wigner 分布関数を用いて出力電場の強度分布を計算すると Fig. 6 のようになる。座標変換に表れているように、 $A > C$ のときは t と ξ のチャープの方向が逆となっていることがわかる。したがって、 x - t 分布や ω - ξ 分布の傾きも変化する。チャープによる半値全幅の広がり、時間波形は 3.2 倍に、空間周波数波形は 2.7 倍となる。そして、空間波形の半値全幅は 1.2 倍と広がる。空間周波数波形の半値全幅が $A > C$ の場合よりも狭くなるのは、式 (8) において ξ_1 に掛かる係数が小さくなるためである。

これらの結果より、 $A > C$ の場合と $A < C$ の場合の出力電場強度分布を比較すると、空間波形の半値全幅は

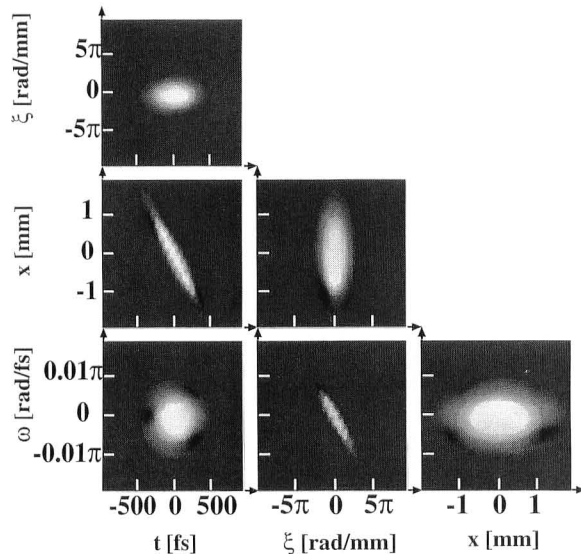


Fig. 6. Output field intensity profile. $A=B=500$ [mm], $C=D=600$ [mm].

$A > C$ の場合縮小し, $A < C$ の場合拡大する. この拡大・縮小の比はレンズの焦点距離の比つまり C/A によって決まる. そして, ξ と t のチャープの方向が反対となるため, $x-t$ 分布や $\omega-\xi$ 分布に生じる傾きも異なる. チャープによる波形の半値全幅の変化は, 時間波形についてはどちらの場合も同じになるが, 空間周波数波形は異なる. これは, 式 (7) と式 (8) の t と ξ の変換において, t は同じになるが ξ は異なるためである. さらに, 時間チャープによる遅延によってパルスの前後で到達する場所が異なるため, 焦点距離の比が 1 より小さいと光パルスが空間軸上を下から上へ, 大きいと上から下へと移動することがわかる.

4. ま と め

超短光パルスの波形整形において生じる時間と空間の相互作用—時空間結合—を, 時空間 Wigner 分布関数を用いて定量的に解析した.

波形整形器の出力側のレンズと回折格子間の距離をレンズの焦点距離からずらした場合には, 光パルスの電場の空間成分と時間角周波数成分に時空間チャープによる時間遅延が生じることが確認できた. これにより, 焦点位置からのずれによって, 超短光パルスの波長が長波長から短波長へ, またはその逆に短波長から長波長へと移ることがわかった. さらに, 時空間分布では焦点位置からのずれが同じ

であれば, 短くしたときと長くしたときとで同じ分布になることを確認した.

焦点距離の異なるレンズを組み合わせた場合には, 空間波形の半値全幅の拡大・縮小が確認できた. そして, 時間チャープのために光パルスの前後で到達する場所が異なることがわかった.

以上のような方法で時空間結合による効果を定量化することで, 空間軸上の任意の場所に特定の波長の光を照射することや, 光の照射方向を高速に変化させるなどの応用が考えられる. これは, 高速物性の制御などにおいて非常に有用な効果をもたらすものと思われる.

文 献

- 1) S. D. Silvestri, J. G. Fujimoto, E. P. Ippen, E. B. Gamble, Jr., L. R. Williams and K. A. Nelson: "Femtosecond time-resolved measurements of optic phonon dephasing by impulsive stimulated raman scattering in α -perylene crystal from 20 to 300 K," Chem. Phys. Lett., **16** (1985) 146-151.
- 2) A. M. Weiner, J. P. Heritage and J. A. Salehi: "Encoding and decoding of femtosecond pulses," Opt. Lett., **13** (1988) 300-302.
- 3) A. M. Weiner, J. P. Heritage, R. J. Hawkins, R. N. Thurston and E. M. Kirschner: "Experimental observation of the fundamental dark soliton in optical fibers," Phys. Rev. Lett., **61** (1988) 2445-2448.
- 4) J. J. Baumberg, A. P. Heberle, K. Köhler and K. Ploog: "Ultrafast coherent carrier control in quantum wells," J. Opt. Soc. Am. B, **13** (1996) 1246-1250.
- 5) M. B. Danailov and I. P. Christov: "Time-space shaping of light pulses by Fourier optical processing," J. Mod. Opt., **36** (1989) 725-731.
- 6) M. M. Wefers and K. A. Nelson: "Analysis of programmable ultrashort waveform generation using liquid-crystal spatial light modulators," J. Opt. Soc. Am. B, **12** (1995) 1343-1362.
- 7) M. M. Wefers and K. A. Nelson: "Space-time profiles of shaped ultrafast optical waveforms," IEEE J. Quantum Electron., **32** (1996) 161-172.
- 8) Y. Yasuno, Y. Sutoh, N. Yoshikawa, M. Itoh, M. Mori, K. Komori, M. Watanabe and T. Yatagai: "Time-space conversion of femtosecond light pulse by spatio-temporal joint transform correlator," Opt. Commun., **177** (2000) 135-139.
- 9) J. Payne and A. Migus: "Space-time Wigner function and their application to the analysis of a pulse shaper," J. Opt. Soc. Am. B, **12** (1995) 1480-1490.
- 10) M. J. Bastiaans: "The Wigner distribution function applied to optical signals and systems," Opt. Commun., **25** (1978) 26-30.