

連続パルス照射による量子ビットのコヒーレンス破壊の低減

番 雅 司

量子コンピューターは素因数分解や離散対数などの特定の問題に対して、従来のコンピューターに比べて圧倒的な処理能力を示す¹⁾。量子コンピューターの高い処理能力は量子状態の重ね合わせ、量子纏れ合い、量子測定による波束の収縮などを巧みに利用した結果として達成される。量子コンピューターのすぐれた性能のために、多くの研究機関において量子コンピューターの実現を目指した研究が活発に行われている。量子コンピューターを実現する上での最大の障害は、外部環境の影響による量子状態のコヒーレンス破壊である。量子コンピューターが機能するためには、量子コンピューターが計算を実行している間、多数の量子ビットの状態のコヒーレンスが保たれていなければならない。量子コンピューターを外部環境の影響から完全に遮蔽できればよいのであるが、これは実際上不可能である。このために、外部環境の影響を受けても量子ビットの状態がコヒーレンスを保てるような工夫が必要不可欠である。このような工夫の代表的なものが量子誤り訂正符号である²⁻⁴⁾。これは本来必要な量子ビットに付加的な量子ビットを付け加えて量子状態に冗長性をもたせ、外部環境の影響によって量子状態のコヒーレンスが破壊されても、付加された量子ビットを利用することによって破壊されたコヒーレンスを回復する方法である。また、別の方法として、物理現象を巧みに利用して量子ビットのコヒーレンスを回復させる方法が存在する^{5,6)}。この方法の特長は量子ビットに冗長性を必要としないことである。前者はソフトウェア的なコヒーレンスの回復方法であるのに対して、後者はハードウェア的なコヒーレンスの回復方法であると考えることができる。本解説では、ハードウェア的な量子ビ

ットのコヒーレンスの回復方法として、量子ビットにコヒーレントな π -パルスを連続照射することによって量子ビットのコヒーレンスを回復する方法を紹介する⁵⁾。

1. 量子ビットのコヒーレンス破壊

外部環境との相互作用によって引き起こされる量子ビットのコヒーレンスの減衰を定式化する。量子ビットのコヒーレンスを破壊する外部環境との相互作用として、量子ビットと外部環境を合わせた合成系のハミルトニアン H が次の式で与えられる場合を考えよう^{5, 7-9)}。

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad H_0 = \omega \sigma_z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k$$

$$H_{\text{int}} = \sum_k g_k (a_k^\dagger + a_k) \sigma_z \quad (1)$$

この式において、 a_k と a_k^\dagger は外部環境のモード k の消滅・生成作用素であり、交換関係 $[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}$ 、および $[a_k, a_l] = [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0$ を満足する。また、 ω は量子ビットのエネルギーを表し⁸⁾、作用素 $\sigma_j (j=z, \pm)$ は次の行列で与えられる。

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

作用素 σ_z の固有値 $1/2$ と $-1/2$ に対応する固有ベクトルを $|0\rangle$ 、および $|1\rangle$ と表すものとする。このハミルトニアンを用いてハイゼンベルグ方程式を計算すれば明らかのように、式 (1) で与えられる量子ビットのコヒーレンス破壊のモデルは、古典的な確率過程に従うランダム位相変調^{10, 11)} の量子力学的な拡張に対応する。

日立製作所基礎研究所 (〒350-0395 埼玉県比企郡鳩山町赤沼 2520 番地)
E-mail: m-ban@harl.hitachi.co.jp

⁸⁾ 本解説ではプランク定数 \hbar とボルツマン定数 k_B が $\hbar = k_B = 1$ となる単位系を採用する。

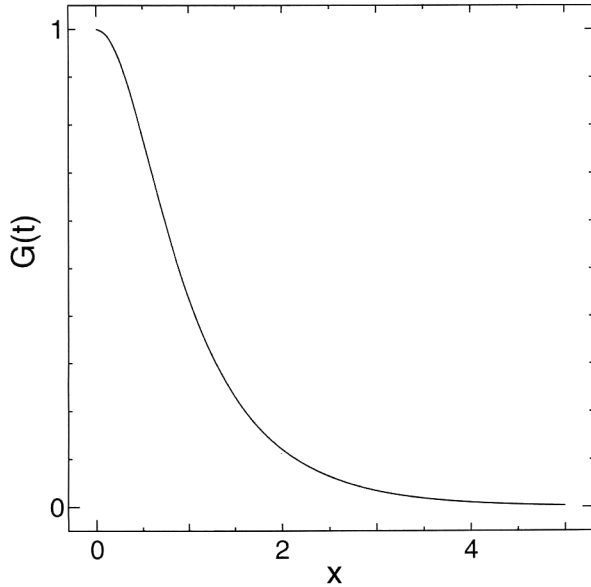


図1 関数 $G(t)$ の時間依存性 ($x = \omega_c t$). このグラフでは外部環境のパラメーターの値を $T/\omega_c = 0.2$ であると仮定した.

量子ビットと外部環境を合わせた合成系の量子状態を表す密度行列 $\rho^{QE}(t)$ の時間発展は次の Liouville-von Neumann 方程式によって決定される.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^{QE}(t) = -i[H, \rho^{QE}(t)] \quad (3)$$

初期時刻 $t=0$ においては量子ビットと外部環境の間には相関がなく、外部環境が熱平衡状態であると仮定すれば、密度行列 $\rho^{QE}(0)$ は次の式で与えられる.

$$\rho^{QE}(0) = \rho^Q(0) \otimes \rho^E(0) \quad (4)$$

$$\rho^E(0) = \left[\prod_k \left[\frac{1}{\bar{n}_k + 1} \sum_{m_k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}_k}{\bar{n}_k + 1} \right)^{m_k} |m_k\rangle \langle m_k| \right] \right] \quad (4)$$

ここで、 $\rho^Q(0)$ は量子ビットの初期時刻における密度行列であり、パラメーター \bar{n}_k は熱平衡状態における外部環境のモード k の平均粒子数を表す. このような初期条件の下で、Liouville-von Neumann 方程式 (3) を解き、量子ビットの縮約された量子状態 $\rho^Q(t) = \text{Tr}_E \rho^{QE}(t)$ を求めれば、次の結果が得られる^{5,8,9)}.

$$\langle 0 | \rho^Q(t) | 0 \rangle = \langle 0 | \rho^Q(0) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \rho^Q(t) | 1 \rangle = G(t) e^{i\omega t} \langle 0 | \rho^Q(0) | 1 \rangle \quad (5)$$

$$\langle 1 | \rho^Q(t) | 1 \rangle = \langle 1 | \rho^Q(0) | 1 \rangle$$

$$\langle 1 | \rho^Q(t) | 0 \rangle = G(t) e^{-i\omega t} \langle 1 | \rho^Q(0) | 0 \rangle \quad (6)$$

外部環境の影響による量子ビットのコヒーレンスの減衰は次の式で与えられる関数 $G(t)$ によって決定される.

$$G(t) = \exp\left(-\sum_k g_k^2 (1 + 2\bar{n}_k) \frac{1 - \cos(\omega_k t)}{\omega_k^2}\right)$$

$$= \exp\left(-\int d\omega \frac{dk}{d\omega} \nu(\omega) g^2(\omega) [1 + 2\bar{n}(\omega)] \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2}\right)$$

(7)

ここで、 $\nu(\omega)$ は外部環境のスペクトル密度関数である. また、 $\bar{n}(\omega) = 1/(e^{\omega/T} - 1)$ はエネルギー ω 、温度 T の Bose-Einstein 分布である. 式 (7) で与えられる関数 $G(t)$ は $G(0) = 1$ を満足し、時間とともに単調減少し、 $G(\infty) = 0$ の成り立つことがわかる⁹⁾. すなわち、外部環境の影響によって量子ビットのコヒーレンスは時間の経過とともに単調に減少する. 例えば、外部環境のモデルとして次の式を仮定しよう.

$$\frac{dk}{d\omega} \nu(\omega) g^2(\omega) = \omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (8)$$

このとき、関数 $G(t)$ を具体的に計算すると次の結果が得られる.

$$G(t) = \exp\left[-\ln(1 + \omega_c^2 t^2) - 2\ln\left(\frac{\sinh(\pi T t)}{\pi T t}\right)\right] \quad (9)$$

簡単な解析から、この関数が次の性質を満足することがわかる.

$$G(t) \approx \begin{cases} \exp[-(\omega_c t)^2] & (t < \omega_c^{-1}) \\ (\omega_c t)^{-1} & (\omega_c^{-1} < t < T^{-1}) \\ \exp(-Tt) & (t > T^{-1}) \end{cases} \quad (10)$$

この場合、時間領域 $t > T^{-1}$ においてのみ量子ビットのコヒーレンスの減衰に対して緩和時間近似が成り立つ. 関数 $G(t)$ の時間変化の様子をプロットすると図1のようになる. この図は関数 $G(t)$ の特徴的な性質式 (10) を示している.

2. 連続パルス照射によるコヒーレンス破壊の低減

前章の考察から、外部環境の影響によって量子状態のコヒーレンス (密度行列の非対角成分) が時間とともにいかに減衰するかが明らかになった. この章では、パルス幅が非常に狭いコヒーレントな π -パルスを連続的に照射することによって、量子ビットのコヒーレンスの減衰を抑えることが可能であることを示そう. 外部から照射するパルスと量子ビットとの相互作用ハミルトニアンは次の式で与えられる.

$$V(t) = -\frac{1}{2} \mu (E(t) \sigma_+ - E^*(t) \sigma_-) \quad (11)$$

ここで、 μ は量子ビットの双極子モーメントの非対角成分^{b)}であり、 $E(t)$ はパルスを表す複素振幅である. また、式 (11) では回転波近似を用いた¹²⁾. さらに、複素振幅 $E(t)$ はパルスの包絡線関数 $f(t)$ を用いて、 $E(t) = f(t) e^{-i\omega t}$ で与えられると仮定する¹³⁾. 外部からの

^{b)} 位相を適当に選ぶことによって、パラメーター μ を実数とした.

パルスを照射することによって量子ビットのコヒーレンス減衰を抑えるために、パルスの包絡線関数 $f(t)$ を次のように仮定する。

$$f(t) = \sum_{j=1}^{2n} f_j \Delta t_j \delta(t - t_j) \quad \mu f_j \Delta t_j = \pi$$

$$t_{2n} > t_{2n-1} > \dots > t_2 > t_1 > 0 \quad (12)$$

ここで、 Δt_j は j 番目のパルスの幅を表す。この式はパルス幅が量子ビットと外部環境からなる合成系の時間発展のタイムスケールに比べて十分に短い $2n$ 個の π -パルスを時刻 t_1, t_2, \dots, t_{2n} で量子ビットに照射することを表している。

量子ビットにパルスを照射した場合の量子ビットと外部環境からなる合成系の量子状態を表す密度行列 $\rho^{\text{QE}}(t)$ の時間発展は次の Liouville-von Neumann 方程式によって決定される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^{\text{QE}}(t) = -i[H + V(t), \rho^{\text{QE}}(t)] \quad (13)$$

ここで、ハミルトニアン H は式 (1) で与えられ、 $V(t)$ は式 (11) で与えられる。この方程式を式 (4) で与えられる初期条件の下で解けば、密度行列 $\rho^{\text{QE}}(t)$ は次のようになる⁹⁾。

$$\rho^{\text{QE}}(t) = U \exp(-iMt) W(t_{2n}, t_{2n-1}) \dots$$

$$W(t_2, t_1) U^\dagger \rho^{\text{QE}}(0) U W^\dagger(t_2, t_1) \dots$$

$$W^\dagger(t_{2n}, t_{2n-1}) \exp(iMt) U^\dagger \quad (14)$$

この式の右辺に現れる各作用素はそれぞれ次の式で定義される。

$$U = \exp\left[\sum_{\mathbf{k}} -\frac{g_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger) \sigma_z\right] \quad M = \omega \sigma_z + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$$

$$(15)$$

$$W(t_j, t_k) = -S(t_j) S^\dagger(t_k) \left(\frac{1}{2} + \sigma_z\right)$$

$$-S^\dagger(t_j) S(t_k) \left(\frac{1}{2} - \sigma_z\right) \quad (16)$$

$$S(t) = \exp\left[-\sum_{\mathbf{k}} \frac{g_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} - a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}} t})\right] \quad (17)$$

このとき、量子ビットの縮約された量子状態 $\rho^{\text{Q}}(t) = \text{Tr}_{\text{E}} \rho^{\text{QE}}(t)$ は式 (5)、および式 (6) と同じ形で与えられる。ただし、量子ビットのコヒーレンスの減衰を決める関数 $G(t)$ は式 (7) の代わりに次の式で与えられる。

$$G(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{g_{\mathbf{k}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} (1 + 2\bar{n}_{\mathbf{k}}) |F_{\mathbf{k}}^0 + \Delta F_{\mathbf{k}}|^2\right)$$

$$(18)$$

ここで、パラメーター $F_{\mathbf{k}}^0$ と $\Delta F_{\mathbf{k}}$ は次の式で定義される。

$$F_{\mathbf{k}}^0 = 1 - \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t)$$

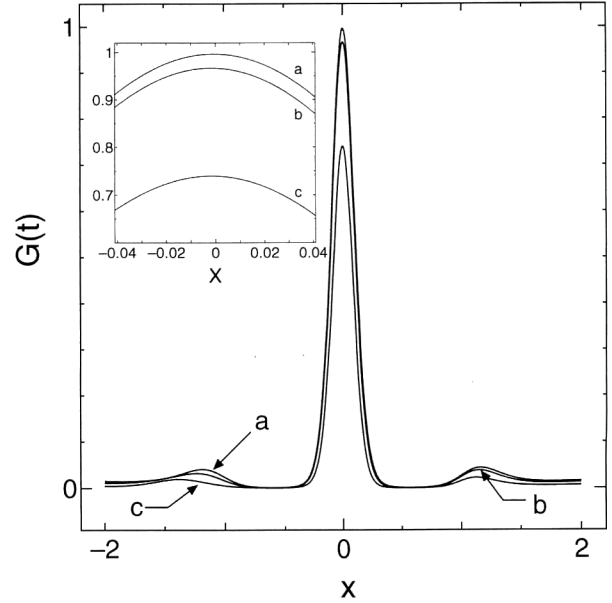


図2 外部環境を特徴づけるパラメーターが $g=4$, $\gamma t_c=5$ で与えられる場合の関数 $G(t)$ の時間依存性 ($x = (t - t_k)/t_k$). 各グラフは (a) 10 個の π -パルス ($n=5$), (b) 6 個の π -パルス ($n=3$), (c) 4 個の π -パルス ($n=2$) を照射した場合に対応する。また、挿入図は原点 ($x=0$) 付近を拡大したものである。

$$\Delta F_{\mathbf{k}} = 2 \sum_{j=1}^n [\exp(i\omega_{\mathbf{k}} t_{2j}) - \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t_{2j-1})] \quad (19)$$

量子ビットに $2n$ 個の π -パルスを照射した効果はパラメーター $\Delta F_{\mathbf{k}}$ に反映されている。もちろん、 $\Delta F_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ とすれば、式 (19) は式 (7) に帰着する。

パルス照射によって量子ビットのコヒーレンスの減衰を抑えるために、 $2n$ 個の π -パルスを照射する時刻 t_1, t_2, \dots, t_{2n} を次のように設定しよう。

$$t_{2j} = \left(j - \frac{1}{2}\right) \tau \quad t_{2j-1} = \left(j - \frac{3}{4}\right) \tau \quad (20)$$

パラメーター τ と π -パルスの個数を適当に調整することによって、量子ビットの完全なコヒーレンスを持ち得る時刻を任意に設定することができる。このようにパルスを照射する時刻を設定したとき、パラメーター $\Delta F_{\mathbf{k}}$ は次のようになる。

$$\Delta F_{\mathbf{k}} = -\frac{1 - \exp(i\omega_{\mathbf{k}} n \tau)}{\cos(\omega_{\mathbf{k}} \tau / 4)} \quad (21)$$

次に、パラメーター $F_{\mathbf{k}}^0$ と $\Delta F_{\mathbf{k}}$ を評価するために、外部環境の切断振動数を ω_c 、不等式 $|t - t_k| \ll \omega_c^{-1}$ を満足する適当なパラメーター t_c を導入する。このとき、条件 $t_c = n\tau$ の下で、 $n \gg 1$ 、および $\omega_c \tau \ll 1$ を仮定すれば、 $F_{\mathbf{k}}^0 + \Delta F_{\mathbf{k}}$ を次のように近似することができる⁵⁾。

$$F_{\mathbf{k}}^0 + \Delta F_{\mathbf{k}} \approx [-i\omega_{\mathbf{k}}(t - t_c) + O(\omega_c^2 \tau^2)] \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t)$$

$$(22)$$

したがって、量子ビットのコヒーレンスの減衰を決定する

⁹⁾ Liouville-von Neumann 方程式 (13) の解き方に関しては文献 5) を参照されたい。

関数 $G(t)$ は次のようになる。

$$G(t) \approx \exp\left[-\frac{1}{2}D^2(t-t_c)^2\right] \quad (23)$$

ここで、パラメーター D^2 は $D^2 = \sum_k g_k^2 (1 + 2\bar{n}_k)$ で与えられる。この結果は、時刻 $t = t_c$ において量子ビットが完全なコヒーレンスをもっていることを示している。そして、量子ビットが完全なコヒーレンスをもっている時刻 t_c は式 (20) によってパルスを照射する時刻を決定するパラメーター τ と照射する π -パルスの個数を決めるパラメーター n を適当に調節することによって、任意の時刻に設定することが可能である。もちろん、量子ビットが完全なコヒーレンスをもっているのは時刻 t_c においてのみであり、この時刻から外れるに従って量子ビットのコヒーレンスは急激に減衰する。例えば、この章で提案された方法を量子コンピューターのメモリーを構成する量子ビットのコヒーレンス保持に応用する場合、量子ビットが完全なコヒーレンスをもち得る時刻 t_c を量子コンピューターのクロックに同期させる必要がある。すなわち、時刻 t_c に量子ビットの情報を読み出すようにしなければならない。

以上の解析では、量子ビットのコヒーレンスの減衰を抑えるためには、非常に多くの数のパルスを短時間に照射しなければならないが、実際にはそれ程多くのパルスを照射しなくても十分であることがわかる。このことを理解するために、スペクトル密度関数がガウス分布で与えられる外部環境¹³⁾ が基底状態 ($\bar{n}_k = 0$) にある場合を考えよう。このとき、式 (20) で与えられる条件の下で関数 $G(t)$ を具体的に求めると次のようになる。

$$G(t) = \exp\left[-\frac{g}{2\gamma\sqrt{\pi}} \int d\omega \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{\gamma^2}\right) \left|1 - \exp(i\omega t) - \frac{1 - \exp(i\omega t_c)}{\cos(\omega t_c/4)}\right|^2\right] \quad (24)$$

ここで、 g 、 γ 、 ω_c は外部環境を特徴づける実パラメーターである。関数 $G(t)$ の時間変化をプロットすると図2のようになる。この図から明らかなように、 $n = 5$ 程度で

関数 $G(t)$ は $G(t_c) \approx 1$ を満足する。すなわち、必ずしも $n \gg 1$ でなくても量子ビットのコヒーレンスの減衰を抑えることが十分に可能であると考えられる。

最後に、本章で提案された量子ビットのコヒーレンス破壊を抑える方法を実際に用いる場合の問題点をまとめておこう。本章の方法が十分に機能するためには、パルス幅が十分に狭い正確な π -パルスを発生させることが必要不可欠である。量子ビットに照射するパルスが π -パルスからずれば、時刻 t_c における量子ビットのコヒーレンス回復は不完全になってしまう。また、外部環境による量子ビットの状態の攪乱はビットフリップと位相エラーに分けることができるが、本章で提案された方法は位相エラーに対してのみ有効である。したがって、実際に量子ビットのコヒーレンス破壊を抑えるためには、本章の方法と量子誤り訂正符号を組み合わせた方法が有効であると考えられる。量子誤り訂正符号の立場からみれば、本来はビットフリップと位相エラーを抑えるための冗長性が必要であるが、本章の方法を組み合わせることによってビットフリップを抑えるための冗長性で済むというメリットがある。

文 献

- 1) A. Ekert and R. Jozsa: *Rev. Mod. Phys.*, **68** (1996) 733.
- 2) P. Shor: *Phys. Rev. A*, **52** (1995) R2493.
- 3) A. M. Steane: *Proc. R. Soc. London A*, **452** (1996) 2551.
- 4) A. R. Calderbank and P. Shor: *Phys. Rev. A*, **54** (1996) 1098.
- 5) M. Ban: *J. Mod. Opt.*, **45** (1998) 2315.
- 6) L. Viola and S. Lloyd: *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 2733.
- 7) C. W. Gardiner: *Quantum Noise* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- 8) W. G. Unruh: *Phys. Rev. A*, **51** (1995) 992.
- 9) G. M. M. Palma, K. Suominen and A. K. Ekert: *Proc. R. Soc. London A*, **452** (1997) 567.
- 10) P. W. Anderson: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **9** (1954) 316.
- 11) R. Kubo: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **9** (1954) 935.
- 12) L. Allen and J. H. Eberly: *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Dover, New York, 1975).
- 13) M. Aihara: *Phys. Rev. B*, **21** (1980) 2051.

(2000年8月23日受理)