

ツイストネマティック液晶光変調器と2次元回折格子による波面形状センサーを用いた実時間補償光学系

服部 雅之*・西村 雅文*・小松 進一*,**

*早稲田大学理工学部応用物理学科 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

**早稲田大学バイオ・フォトンクス新素材研究施設 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

Real-Time Adaptive Optics Using Twist Nematic Liquid Crystal Light Modulator and Wave-Front Distribution Sensor with Two-Dimensional Grating

Masayuki HATTORI*, Masafumi NISHIMURA* and Shinichi KOMATSU*,**

*Department of Applied Physics, Waseda University, 3-4-1, Ohkubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8555

**Material Research Laboratory for Bioscience and Photonics, Waseda University, 3-4-1, Ohkubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8555

Adaptive optics using wave-front distribution sensor with two-dimensional grating, and twist nematic liquid crystal phase modulator is applied to compensate the wave-front distortion by a thermal turbulence. Instead of conventional closed loop setup, the phase compensator is directly driven by the conjugation signal for the input phase distortion calculated in the wave-front distribution sensor at each moment. The improved response speed of the system enabled the use of twist nematic liquid crystal phase compensator. The experimental result actually shows that the TN liquid crystal panel with the response time of 30 ms is effective for the compensation of phase distortion by the thermal turbulence. This study suggests a new method to construct a practical adaptive optics in affordable costs.

1. はじめに

補償光学系とは、入射光波面の位相乱れによる光学機器の空間分解能低下が大きい場合にも、入射波面の補正によって本来に近い性能を引き出す機構のことである。大気乱流下の大口径天体望遠鏡をはじめとして^{1,2)}、媒質の乱れによる入射波面の歪みに対し実時間追従を行うためには動作速度が問題となる。補償光学系で動作速度を高めるためのひとつの方法は、当然、波面センサーや波面変調器など構成部品的高速化であるが、反面、高価な特殊部品を多用するほどシステムも複雑で大掛かりになってしまいがちである。新分野での応用発展^{3,4)}を考えると、補償光学系のより簡便な構成法も検討価値がある。

今回の研究では主に、系の制御方法を検討して、動作速度の向上をはかりつつより簡便な補償光学系の構成法を検討した。従来の補償光学系の多くは波面変調器の後に波面センサーを配置し、残留波面歪みがゼロに収束するように

波面補償器を制御することで、フィードバック型の閉ループ⁵⁾を構成する。今回、筆者らが注目したのは、閉ループを利用するとそれ自体の収束時間が高速化の制約になりうる側面である。通常閉ループ型の系では、動作時の安定性のために収束時間はデバイス個々の反応時間の数倍になってしまう。もし、入射波面の歪み形状の共役位相を直接波面変調器に入力して光波面補償を行えば、系の動作はフィードバックループの収束時間から解放され速度は改善される。

そこで筆者らは、これまで研究を進めてきている光波面形状センサー^{6,7)}の応用を試みた。光波面形状センサーは、2次元回折格子を用いたごく簡単な光学系を利用して入射波面の局所的傾斜の分布を計測し、それらを数値的に積分して光波面歪みの全体形状を出力する。これを高速化して利用すれば、フィードバックループなしでも実時間で入射波面と共役となるように位相変調器を制御することが可能になる。今回は、ツイストネマティック液晶を利用した波面変調器と組み合わせて補償光学系を構成したところ、熱

E-mail: hattori@opt.phys.waseda.ac.jp

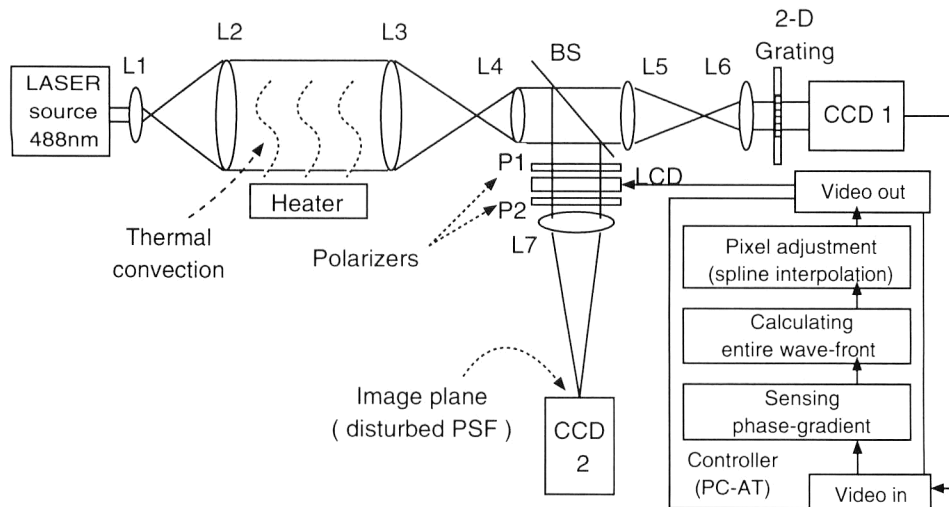


Fig. 1 The experimental setup.

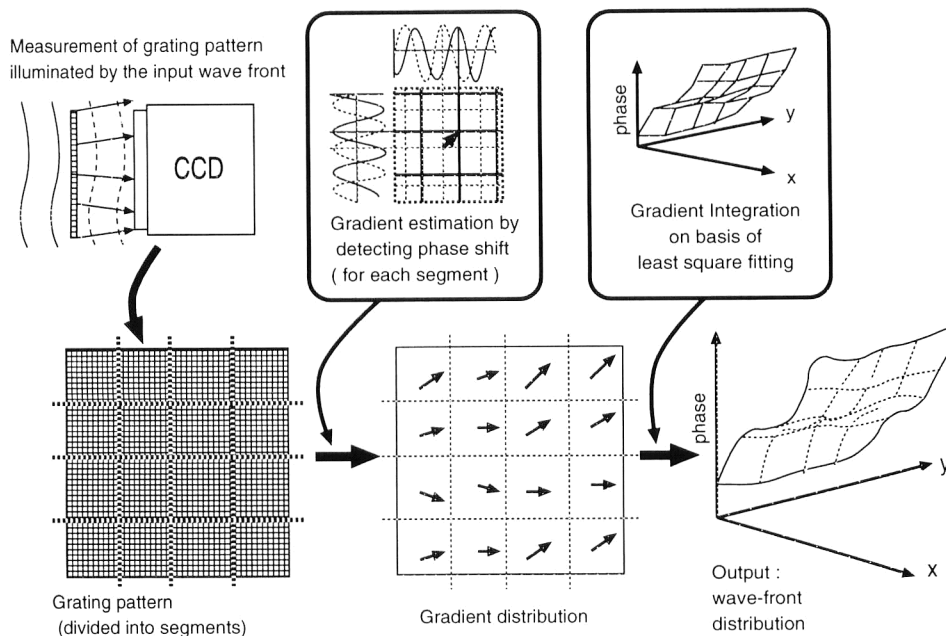


Fig. 2 The data flow and the system operation inside the wave-front distribution sensor.

乱流による波面乱れに対して実時間での追従が可能であることを確認できた。近年、積層ピエゾを用いた可変形状鏡にかわり、液晶波面変調器を利用した光波面補償の研究^{5,6)}がみられるが、比較的入手容易な通常の内ネマティック液晶パネルでは実時間動作での速度不足⁸⁾が指摘され、時間的な変化がごく遅い場合での利用にとどまる状況もみられる。今回の筆者らの研究は、ネマティック液晶による補償光学系という面からみても、容易かつ効果的な構成法を示したことになる。

2. 原理

今回筆者らが構成した実験用補償光学系は Fig. 1 のとおりである。大まかにいえば、入射波面の形状を光波面形

状センサーで検出し、パソコンを経由して液晶位相変調器を駆動して入射波面の歪み補償を行う。用いた光波面形状センサーおよび液晶位相変調器に関しては以下で概説する。

2.1 光波面形状センサー

筆者らが研究してきた波面形状センサー^{1,2)}の内部でのデータ処理の流れを Fig. 2 に図示した。全体は大きく波面傾斜計測部と波面形状積分部の2段階に整理できる。波面傾斜計測部は、回折格子の透過像から入射波面の傾斜の分布を測定するまでの部分である。このように、マスクの透過像の横変位から入射波面の傾斜を計測する手法の一般論は文献⁹⁾にみられる。そこには入射波面の傾斜に対する格子状マスクの透過像の横変位量を回折と干渉の原理で

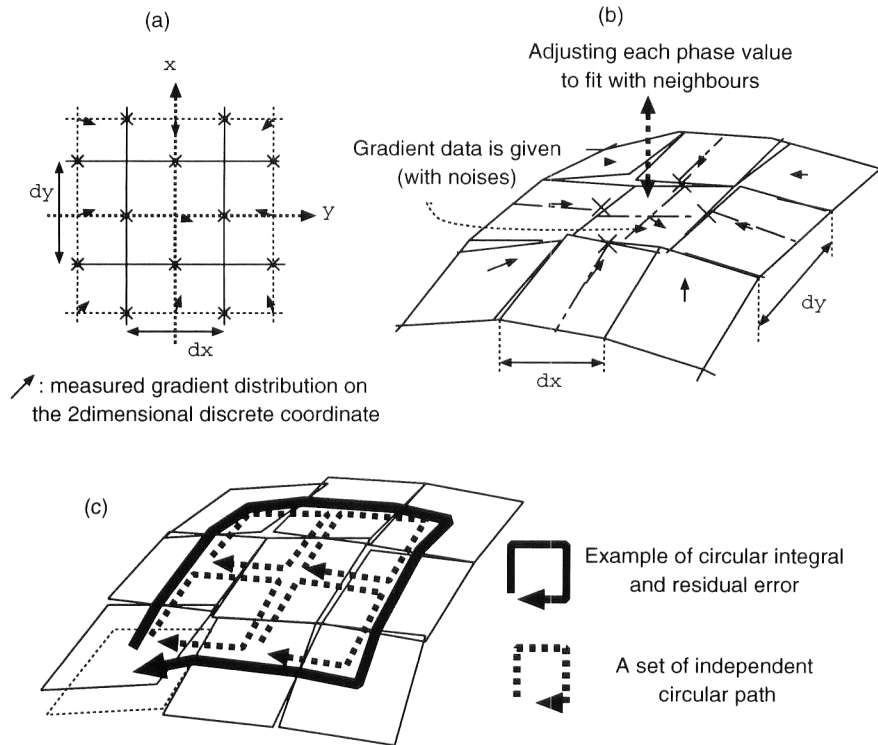


Fig. 3 Discrete description of the phase distribution and its reconstruction from the gradient data. (a) Finite segmentation of phase distribution and (b) determination of the phase distribution from the noisy gradient data. Values of the phase at each segment is determined so as to fit with neighbours. (c) The arrow with solid line shows an example of circular integral. The direct sum of the gradient data accumulates the noise in the path and gives a non-zero results, which leads to a fatal inconsistency that the phase at starting point can't be determined uniquely. Arrows with dashed line shows an example set of independent circular paths.

導いた結果が、式 (1) の輝度伝搬方程式¹⁰⁾ の位相傾斜項の効果と同等になることが示されている。

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial I}{\partial z} = -\nabla I \cdot \nabla \phi - I \nabla^2 \phi \quad (1)$$

輝度伝搬方程式の右辺第1項の位相傾斜 $\nabla \phi$ による効果は、 (x, y) 平面上に広がる輝度分布 $I(x, y)$ が位相分布 $\phi(x, y)$ の傾き方向に変位しながら光軸の z 方向に伝搬していくというものである。そこで、入射波面を格子状マスクで変調し透過像の横変位を後方の CCD (charge coupled device) 像センサー等で撮像し計測すれば、入射波面の傾斜分布がわかることになる。Fig. 2 に示したとおり、筆者らのセンサーでは 2次元の回折格子の透過像を CCD からコンピューターに取り込み、小領域ごとに分割して像の横変位を検出し、波面傾斜の分布を求めている。今回のように回折格子を波面マスクにすると、透過像の変位を直接一意に特定できるのは格子パターン ± 0.5 周期分までなため⁹⁾、一見測定範囲が狭まってしまう。しかし、回折格子マスクから撮像素子まで距離は可変となるのを利用し、波面傾斜量に対する像変位の率を変更すれば測定範

囲の調整が可能となる。その際、信号処理部の調整はプログラムの定数変更だけである。各小領域ごとの横変位量は、像が格子状なのを利用しフーリエ変換の基本周期での位相の変化として検出する⁹⁾。この操作ではフーリエ変換に含まれる積分の作用によりノイズの影響も緩和される。部分領域ごとに像の変位を計測し波面傾斜分布を検出するという意味では、天文用の補償光学でも用いられているハルトマン型波面センサーと同等である⁹⁾。その意味で筆者らの波面形状センサーは、信号処理の導入によってハルトマンセンサーの部分開口を回折格子に置き換えたことで廉価に構成されるものといえる。さらにそれに付随して、波面歪みに対する感度設定等、調整容易になったとみられる部分もある。

得られた波面傾斜の分布は、波面形状積分部の数値積分で統合され入射波面全体の形状となり出力される。2次元波面傾斜の積分は、1次元積分からの類推では一見簡単そうだが実は意外に厄介である。波面の2次元離散表現を Fig. 3(a) および Fig. 3(b) のように位相分布 $\phi(x, y)$ の小平面への分割 (図では 3×3 の分割) としてとらえる

と、波面積分の問題は、Fig. 3(b) で各小平面を傾斜の与えられている状態で高さのみを調整し、図中に×印で示されたような小平面間の境界すべてを連続にする作業となる。これが難問というのは、小平面ごとに1つしかない高さの自由度を用いて、各平面ごとに縦横2つある傾斜データに含まれたノイズに対応し、小平面間のすべての境界での連続性をうまく調整しなければならないからである¹¹⁾。たとえば、 $n \times n$ の小平面への分割であれば、 n^2 個しかない高さの自由度を用いて、合計 $2n^2$ 個の独立なノイズに対応し、 $2n^2 - 2n$ ある境界を連続に保たなければならない。明らかに自由度不足であり、大抵の場合では不連続な境界が残らざるを得なくなる。ここで仮に、1次元の区分積分からの類推で、隣接要素を辿りながら単純に傾斜を足し合わせていく手法をとると、計算に用いた傾斜データに誤差がないと仮定して完全な自由度を割り当てたのと同じになり、積分路上の境界は連続になる反面、積分路に属さなかった境界は不連続になってしまう。たとえ測定ノイズがなくても、積分路上での累積効果のために、離散誤差なども無視ができなくなってくる。そのため、数値積分の方法を工夫する必要がでてくる。筆者らが波面積分に用いた手法ではまず、連続で一意的位相をもつ通常の波面において任意の周回路における傾斜の積分値はゼロとなるべきことに注目する。しかしながら、実測データでこれを計算してみると大抵の場合 Fig. 3(c) の実線矢印のように傾斜データに含まれたノイズが累積しゼロになることはない。そこで、Fig. 3(c) に点線矢印で例示したようなすべての独立な周回路で傾斜の積分値を考え、それらの2乗和が最小になるような位相分布をラグランジュの未定乗数法で厳密に計算する。これは周回路での誤差をいったん認めて、前述の自由度の説明での過剰な拘束条件を緩めたうえ、さらにそれらを最小にすることにあたる。同様の手法は分割式可変形状鏡を制御するアルゴリズムとして提案されている¹¹⁾が、筆者らはこれを光波面形状の数値積分に適用し、一般の $n \times n$ の正方領域分割での計算操作を具体的に求め計算機プログラムを作成した。

上記の数値積分により、波面形状センサーからの出力は各時点での波面の全体形状になる。フィードバックループを介さず波面変調器を制御することで系の高速化が期待される。さらに、今回光波面形状センサー内部での信号処理に関して行った高速化は2章3節で述べる。

2.2 液晶位相変調器

筆者らが今回の実験に用いたのは、液晶プロジェクターに用いられている画像表示用のTN（ツイストネマティック）液晶パネルである。約30msの動作速度をうまく生

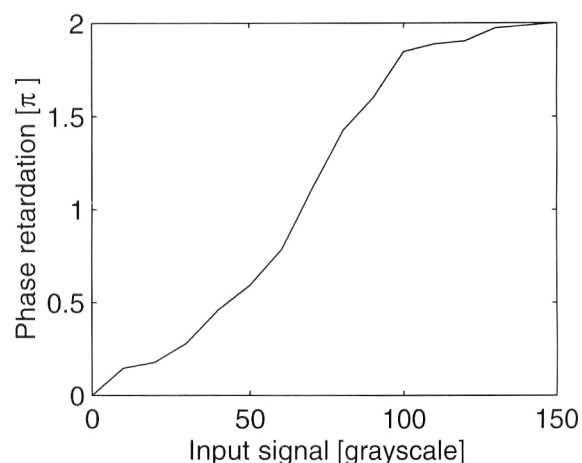


Fig. 4 Phase retardation by the liquid crystal light modulator at the wave length $\lambda = 488$ nm. The lateral axis is gray scale of the video signals from the PC.

かすことで、目視できるくらいの速さのゆらぎならば実時間での補償が可能とみられる。今回は、液晶変調器の入射および出射側の偏光板の角度の調整で、透過光の強度はほぼ一定のまま位相のみが変化する位相変調モードで動作させた^{12,13)}。今回の系では、歪みに対して共役な値で入射波面を直接位相変調するため、位相変調器の線形性が欠かせない。そこで、Fig. 4にあるとおり、パソコンからの信号に対する位相変調特性をあらかじめ測定し補正值として用いた。同図にあるとおり、液晶自体では 2π までの位相変調が可能であるが、 $0 \sim 2\pi$ 間の対応する主値に変換する折り返し処理で、 2π 以上の位相にも対応した。位相信号を折り返した場合、変調器透過後の位相の連続性は入射波長に依存するため、系の波長幅に制限が生じる。その場合でも、中心波長は信号処理部の定数で簡単に変更ができるため、TN液晶パネルなど廉価な位相変調器の活用には簡単な割に有効といえる。不連続な歪みが生じて波面は滑らかでなくなるが、今回の系ではそれらの制御系へのフィードバックがないため、系自体の収束性や安定性へは影響の心配がない。このことで、変調器の性能に応じて安定して波面補償が可能とみられる。

液晶パネルは有効面積27mm×20mm、640×480画素のうち、8mm四方の矩形領域を用いているが、この中にも200×200程度の独立な画素が含まれることとなる。今回の実験では波面形状センサーの領域分割の数、すなわち解像度は14×14に設定したが、液晶への出力の前段でスプライン補間を行い空間的に連続な信号にしている。

2.3 波面形状センサーの高速化

今回、実時間用途への応用をふまえて、2次元回折格子を用いた波面形状センサー^{6,7)}に以下で述べる2点の高速

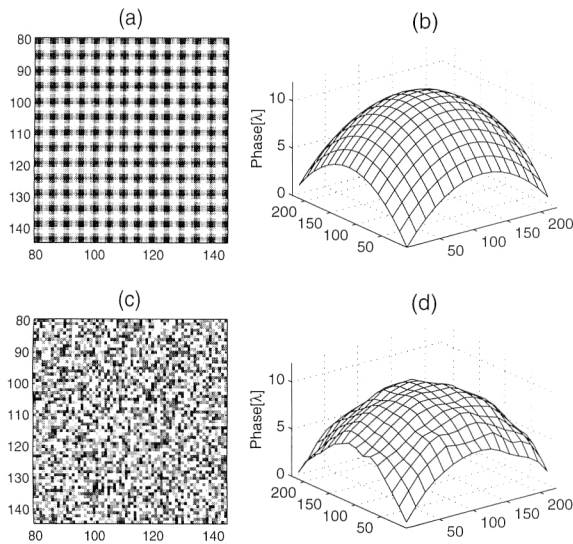


Fig. 5 Robustness of the data processing stage for the noises. (a) Grating pattern without noise and (b) the reconstructed wave-front. (c) Grating pattern with 500% of random noise and (d) the reconstructed wave-front.

化を施した。第1に、回折格子の透過像から入射波面の傾斜を抽出する計算手順を見直した。以前のアルゴリズム^{6,7)}は高速フーリエ変換ですべての空間周波数成分を計算したために、不要な周波数での時間消費が無視できなかった。そこで、回折格子の基本周期のみでの離散フーリエ変換に変更し、計算に必要な正弦・余弦関数値もあらかじめ準備するようにした。これにより実時間動作中の計算量が減少し速度は向上する。第2に、波面形状の積分ではラグランジュの未定乗数法での連立1次方程式の求解が時間を消費していた。そこで、連立方程式を行列表現で扱い求解に必要な逆行列をあらかじめ計算しておくように改良した。そのため、実時間動作中は行列とベクトルの積のみで済み、大幅に高速化された。上記の2点の改良の結果、通常のパソコン (Pentium III-800 MHz) を用いた信号処理プログラム単体の速度テストでは、今回の実験で用いた設定で224×224画素の回折格子の像を16×16画素からなる14×14個の小領域に区分した場合には1秒間に650回、従来との比較で128×128画素の像を8×8個の小領域にした設定では1秒間に1400回の演算処理が可能であった。筆者らの過去のデータと比較して50倍以上高速化され、実時間で天体観測時のゆらぎ計測も可能な速度に達している。

また、波面形状センサーの外來ノイズに対する強さも確認されたので概況を述べておく。Fig. 5(a)は、球面波が入射した場合のCCD1での強度に対応した像をシミュレートしたもので、格子状のパターンが見やすいように中心部を拡大してある。それに対し前述した波面形状の抽出

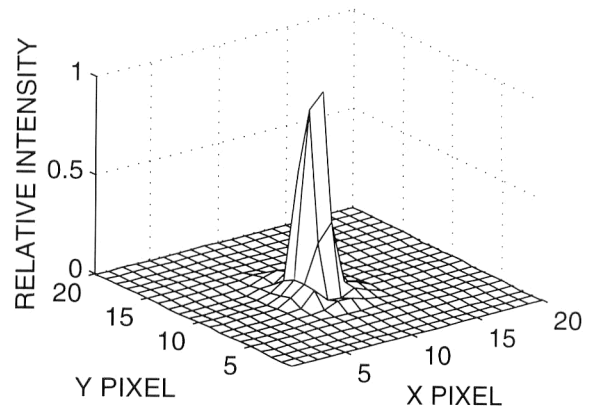


Fig. 6 The PSF for the plane wave. The peak intensity of this PSF is used as the unit of the z-axis in the graphs of other PSFs.

処理を行った結果がFig. 5(b)である。Fig. 5(c)はFig. 5(a)の信号に500% (peak to peak強度の比)のホワイトノイズを加えた場合で、格子信号はノイズに埋もれて視認さえ困難であるが、Fig. 5(d)の出力にはまだ波面形状が十分みてとれる。波面形状センサーのノイズに対する強さは実験中にも確認されており、室内の照明を点灯して入射強度をみえないほどに弱くしても測定値はほぼ正常なままで出力され続けた。

3. 実 験

提案する補償光学系が実時間動作も含め有効なことを実証するため、Fig. 1のような光学系を構成した。光源には波長 $\lambda = 488 \text{ nm}$ のレーザー光を用いた。レンズL2とL3の間で入射波面が乱されると、CCD2の撮像面上の点像分布に影響があらわれる。同時に入射光の一部はBSで波面形状センサーへ分岐され、回折格子の透過像がCCD1からビデオキャプチャボードを経由してパソコンに入力される。そして2章で述べた波面傾斜算出と波面積分のアルゴリズムで波面形状が算出されると、共役な位相分布が画像信号としてパソコンの画像出力から液晶変調器に送られる。液晶変調器は、検出された波面歪みを補正できるように配置されている。実験では、液晶に波面補償信号を送った場合とそうでない場合でCCD2上の点像分布の広がりや強度を比較して波面補償の効果を確認する。なお、波面センサーの前に構成された拡大光学系は、液晶と波面センサーの開口を合わせるものである。また、動的な乱れをもつ波面の実験の際には、レンズL2とL3の間に熱乱流の発生源として80°Cの熱源を配置した。

4. 結 果

Fig. 1の光学系のCCD2上の結像面で、入射波面の乱

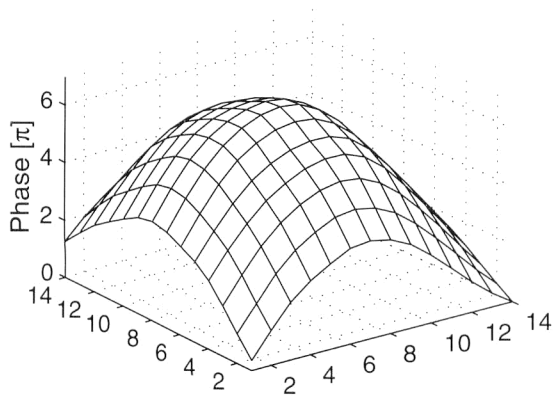


Fig. 7 The output from wave-front distribution sensor for the spherical wave.

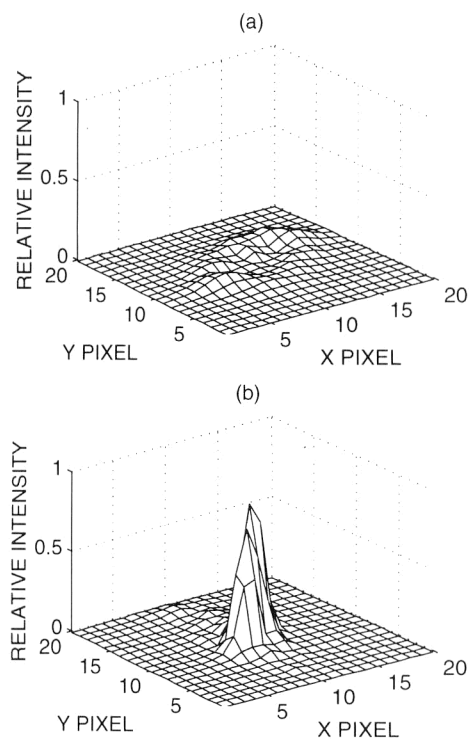


Fig. 8 (a) PSF for the spherical wave and (b) PSF with phase compensation.

れがない場合に得られる点像分布関数が Fig. 6 である。点像分布関数の中心部はおよそ 3 画素 (約 $17.5 \mu\text{m} \times 3$ 画素 $= 52.5 \mu\text{m}$) 四方に収まっており、L7 が 1 辺 $d=8 \text{ mm}$ の矩形開口で焦点距離が $f=500 \text{ mm}$ なことを考えると、回折限界でのスポットサイズ (周囲の暗線の間の距離), $2f\lambda/d=61.0 \mu\text{m}$ にほぼ近い状態となっている。

はじめに静止した球面波で静特性を確認した。レンズ L3 を光源方向にずらしてデフォーカスさせ、球面波状の歪みを与えた場合、波面形状センサーからの出力は Fig. 7 のようになった。その場合の点像分布が Fig. 8(a) である。さらにこの状態から液晶位相変調器に補償信号を入力し、波面補償を行った結果が Fig. 8(b) で、点像分布関

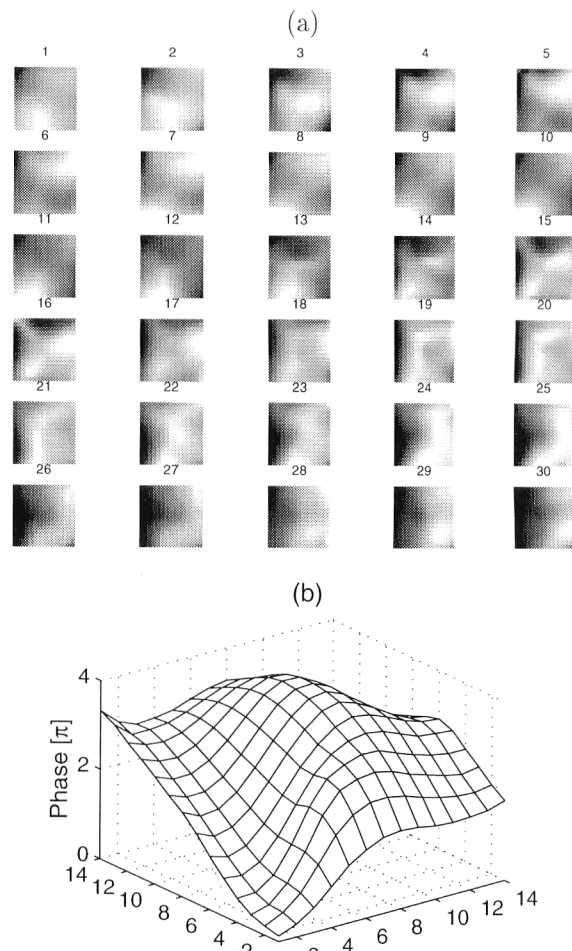


Fig. 9 The wave-front distortion through the upcurrent above the heat source at 80°C . (a) True-time sequence in 30 frames/s. (b) The 3-D plot of the third frame in the sequence. The origin of the pixel plane corresponds to the upper left corner of the image in (a).

数は広がりおよび光量ともに、ほぼ元に近い状態まで改善されていることがわかる。

次に、レンズ L3 を元の位置に戻し、レンズ L2 および L3 の間で入射光線の下におよそ 80°C の熱源を配置し、熱乱流により時間的に変化する波面歪みを与えた。波面形状センサーからのビデオレートの出力は Fig. 9(a) のようになった。Fig. 9(b) は、例として Fig. 9(a) の 3 フレームをグラフに拡大したものである。波面歪みの大きさは最大最小間の位相差の時間平均をとったところ 7.6π であった。この状態で、波面補償がある場合とない場合で点像分布関数 200 枚分の時間平均の比較から波面補償の効果を確認する。この比較法の利点は、Fig. 1 に特別な系の付加が不要なことである。熱乱流下での平均点像分布関数が Fig. 10(a) である。それに対して、波面補償を行うと Fig. 10(b) のようになった。Fig. 11 は波面補償の効果を

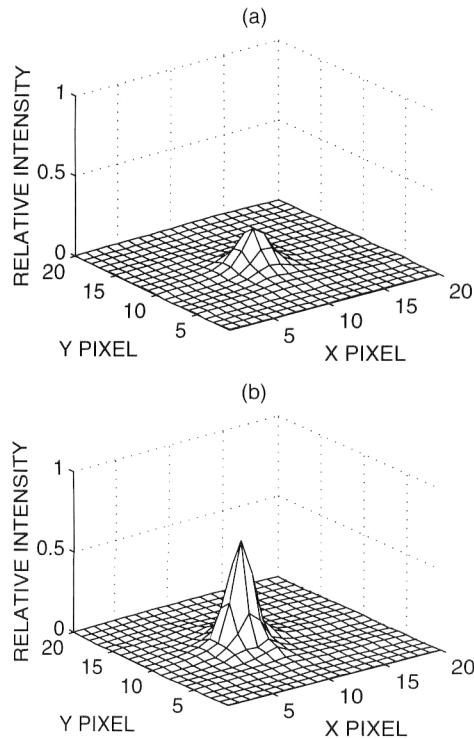


Fig. 10 (a) The PSF by the wave-front distorted the thermal turbulence and (b) the PSF restored by the phase compensation. Both PSFs are the average of 200 continuous frames.

点像分布関数の断面で比較したもので、Fig. 11(a)は球面波状の静止した歪み、Fig. 11(b)は熱乱流に対するものである。各々で実線は波面補償を行った点像分布関数の横断面、点線は波面補償なしでの点像分布関数の横断面を表し、鎖線は比較のために点線の値を定数倍して実線と最大値を合わせたものである。波面補償で強度が中心に集中し、点線と実線の比較からは波面補償により中心の強度が強まるのが、また、鎖線と実線の比較からは点像分布の径が狭まっているのがわかる。以上より、時間的に一定な球面波状の歪みおよび熱乱流による動的な波面乱れに光波面補償を行い、結像特性の改善が確認された。

5. ま と め

2次元回折格子を用いた波面形状センサーをTN液晶位相変調器と組み合わせて補償光学系を構成し、熱乱流により乱された光波面の補償を行った。実験結果から、提案するTN液晶を用いた補償光学系は時間変化する光波面乱れにも効果のあることがわかった。これは、現在比較的手容易な部品でもある程度の性能の実時間補償光学系が廉価かつ簡便に構成されうることを示しており、補償光学が天文観測以外へも応用^{3,4)}されるなかで、新たな用途も考えられる。なお、あらかじめ計算で波面傾斜を積分し、共

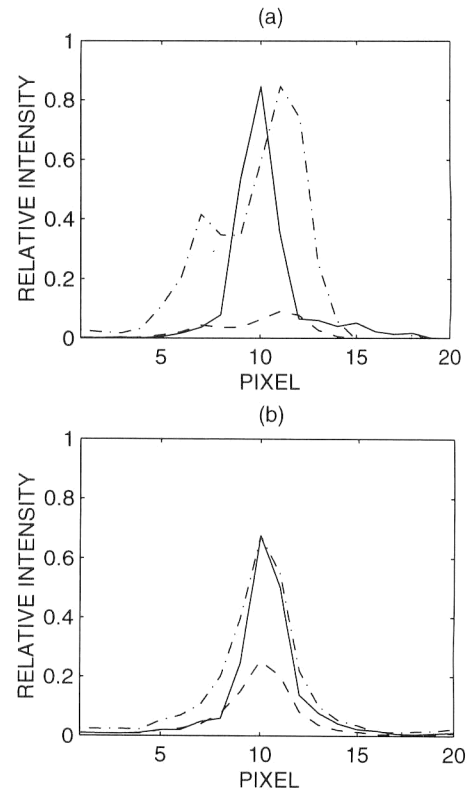


Fig. 11 Cross section of the PSFs. (a) PSFs for spherical wave. (b) PSFs for thermal turbulence. In each result the PSF with phase compensation is shown as solid lines. The intensity is recovered, from disturbed condition shown as dashed lines. The profile is sharpened as well, comparing to one that is regularized by the peak intensity plotted by dash-dot lines.

役位相値で直接に波面変調器を制御する方法は、ハルトマンセンサーなど波面傾斜を利用した補償光学系一般に応用が可能と考えられる。

他にも、今回の筆者らの実験系には、他の分野へ転用を考えられる部分がある。なかでも波面形状センサーは、光学系が回折格子と像センサーのみで小型かつ廉価に構成可能で、調整のほとんどは信号処理部の数値設定で可能なため取り扱いも容易である。今回の研究で高速化されたうえ外来ノイズに強いことも確認されており単体で計測装置としての応用可能性もある。

今後改善すべき点として、液晶やCCDをより高速なものにすれば恐らくはミリ秒単位での動作も可能なことがある。しかしながら、今回の系そのものにもまだ速度的改善の余地が残っている。というのは、波面形状センサーを高速化した結果、処理1回あたりではミリ秒単位の高速度処理が可能になったものの、波面歪みが入ってから波面変調器が反応する間にはまだ10分の1秒ほどの時間遅れがみられた。精密に原因調査を行ってはいないが、静止した球面波の実験で補償動作開始の瞬間のPSFの変化を時系列で

観察したところ、液晶自体は実際に 30 ms 単位で反応するのがみられた。となると次に考えるのは、画像信号のパソコンとの入出力部分で、機器本来の用途から考えても時間遅れがそれほどには重視されていない可能性がある。恐らくは、波面センサーのカメラから液晶への画像出力までを時間遅延の少ない部品に交換するだけでも動特性の改善があるとみられる。なお、上記の改善後にも残る時間遅れについては、予測制御の検討も価値がある^{14,15)}。波面形状センサーでとらえた波面乱れは、媒質の透過像とみることもできる。ゆえにまったくのランダムというよりは、媒質の動的性質を反映したなんらかの規則性が見いだせる可能性も高い。

本研究の一部は早稲田大学特定課題研究助成費 (98 A-875) の援助を得て行われた。

文 献

- 1) 家 正則：“天文学における補償光学”，*光学*, **22** (1993) 408-409.
- 2) 家 正則, 唐牛 宏, 小林行泰：“動きだした 8 m すばる望遠鏡計画”，*応用物理*, **62** (1993) 540-551.
- 3) O. Albert, L. Sherman, G. Mourou, T. B. Norris and G. Vdovin: “Microscopy - Smart microscope: An adaptive optics learning system for aberration correction in multiphoton confocal microscopy,” *Opt. Lett.*, **25** (2000) 52-54.
- 4) D. T. Miller: “Retinal imaging and vision at the frontiers of adaptive optics - by compensating for the minor, as well as the major, defects in the eye's optics, we can look through the lens to observe retinal features the size of single cells,” *Phys. Today*, **53**, No. 1 (2000) 31-36.
- 5) P. M. Brich, J. Gordon, D. Love and A. Purvis: “Real-time optical aberration correction with a ferroelectric liquid crystal spatial light modulator,” *Appl. Opt.*, **37** (1998) 2164-2169.
- 6) H. Ohba and S. Komatsu: “Wavefront sensor using a 2-dimensional diffraction gratings,” *Jpn. J. Appl. Phys.*, **37** (1998) 3749-3753.
- 7) 大場洋士, 小松進一：“2次元回折格子を用いた高解像度波面センサー”，*OPTICS JAPAN '98 講演予稿集*, 18aD07 (1998) 117-118.
- 8) A. V. Kurdryashov, J. Gonlewski, S. Browne and R. Highland: “Liquid crystal phase modulator for adaptive optics. Temporal performance characterization,” *Opt. Commun.*, **141** (1997) 247-253.
- 9) F. Roddier: “Wavefront sensing and the irradiance transport equation,” *Appl. Opt.*, **29** (1990) 1402-1403.
- 10) M. R. Teague: “Deterministic phase retrieval: A Green's function solution,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **73** (1983) 1434-1441.
- 11) S. Engerhard and B. Hatfield: “An exact analytic solution to segmented-mirror adaptive-optics control,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **11** (1994) 874-879.
- 12) N. Konforti and E. Marom and S. Wu: “Phase-only modulation with twisted nematic liquid crystal spatial light modulator,” *Opt. Lett.*, **13** (1988) 251-253.
- 13) C. Soutar, S. E. Monroe Jr. and J. Knopp: “Measurement of the complex transmittance of the Epson liquid crystal television,” *Opt. Eng.*, **33** (1994) 1061-1068.
- 14) C. Schwartz, G. Baum and E. N. Ribak: “Turbulence-degraded wave fronts as fractal surfaces,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **11** (1994) 444-451.
- 15) C. Dessennem and P. Y. Madec: “Modal prediction for closed loop adaptive optics,” *Opt. Lett.*, **22** (1997) 1535-1537.