

# コスト関数と物体の拘束条件とを用いる繰り返し型ブラインドデコンボリューション法

高城 洋明\*・高橋 徹\*\*・林 明彦\*

\*九州工業大学工学部電子工学教室 〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1

\*\*大分工業高等専門学校電気工学科 〒870-0152 大分市牧 1666

## An Iterative Blind Deconvolution Method Using Both a Cost Function and an Object Constraint

Hiroaki TAKAJO\*, Tohru TAKAHASHI\*\* and Akihiko HAYASHI\*

\*Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, 1-1, Sensuicho, Tobata, Kitakyushu 804-8550

\*\*Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology, 1666, Maki, Oita 870-0152

An iterative blind deconvolution method which works without support constraint is proposed. This method is based both on the projection of the image estimate onto the image space satisfying the nonnegativity constraint and on the minimization of a cost function. Accordingly this method is a descendant of both the conventional iterative method proposed by Ayers and Dainty and the cost function method presented by Lane. The effectiveness of the proposed method is shown by computer simulation.

**Key words:** blind deconvolution, image recovery, iterative method, cost function, projection

### 1. はじめに

ブラインドデコンボリューションは困難な像回復問題のひとつである。観測像が回復すべき原像とぼけ関数（点広がり関数）とのたたみ込みとして表現できるときに、ぼけ関数に対する明確な知識なしに原像を得ようとするをブラインドデコンボリューションという。すなわち、ブラインドデコンボリューションは、観測像  $g(x, y)$  が原像  $f(x, y)$  とぼけ関数  $h(x, y)$  とを用いて、

$$g(x, y) = \iint f(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy' \quad (1)$$

と表されるとき、ぼけ関数の明確な知識なしに原像  $f(x, y)$  を得ようとするものである。もちろん、ぼけ関数に対する知識が皆無の場合にはブラインドデコンボリューションは破綻する。このため、原像の非負性などの先験的知識が利用される。Lane と Bates は、原像とぼけ関数とが有限のサポートを有し、したがって観測像  $g(x, y)$  が有限のサポ

ートを有する場合のブラインドデコンボリューションの可能性について、像の  $Z$  変換における zero sheet の概念を用いて明確にした<sup>1)</sup>。また、筆者らは、原像のサポートが知られている場合には、フーリエ反復法を用いて観測像から原像を分離しうることを示した<sup>2,3)</sup>。本論文では、原像とぼけ関数は非負の実数値物体であり、有限のサポートを有するものとする。

ブラインドデコンボリューションを実現する方法として、これまでに種々の方法が提案されてきたが<sup>4)</sup>、その多くは像のサポートの情報を不可欠とする方法である。ここでいうサポートとは、(1) 原像  $f(x, y)$  のサポートの場合と、(2) 観測像  $g(x, y)$  のサポートの場合とがある。原像のサポートを利用できる場合にはブラインドデコンボリューションは強力となるが、一般には原像のサポートを特定できない場合が多い。また、観測像のサポートは利用できる場合が多いものの、観測像にノイズが存在する場合には

\*\*E-mail: tohru@oita-ct.ac.jp

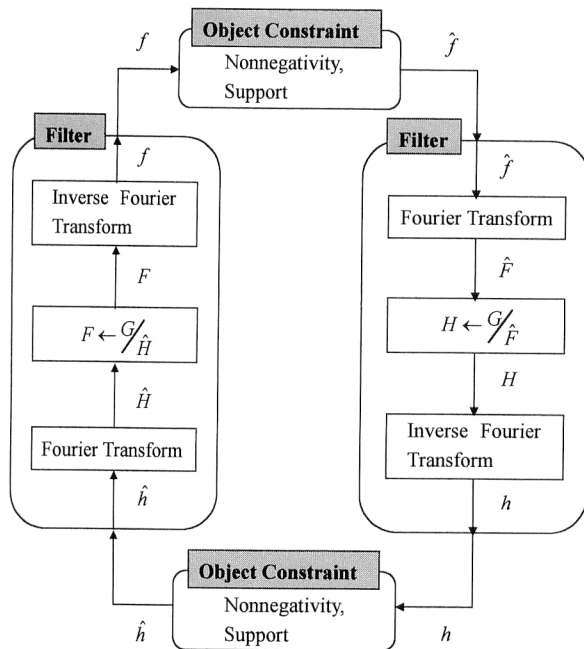


Fig. 1 Block diagram of the AD method.

観測像のサポートも明確に特定できない場合や、サポートが広がってしまう場合を生じてしまう。そこで本論文では、サポート条件をまったく用いることができない場合、すなわち上記 (1), (2) のサポートを利用できない場合にも機能しうるブラインドデコンボリューション法を構築することを目指す。

これまでに提案されてきたブラインドデコンボリューション法の中でも特に有効な方法と考えられているのは、Ayers と Dainty によって提案された繰り返し型のブラインドデコンボリューション法<sup>5)</sup>と、Lane によって提案された conjugate gradient minimization 法<sup>6)</sup>であろう。これらの方法は、サポート条件が利用できる場合とサポート条件が利用できない場合の両方の場合に適用できる方法である。

繰り返し型のブラインドデコンボリューション法 (以後 AD 法と略記する) は、フーリエ変換と逆フーリエ変換とを用い、原像とぼけ関数の非負性などの拘束条件を繰り返し適用してデコンボリューションしようとする方法である。本方法は物体に対する先験的知識をアルゴリズムに取り込みやすいという利点を有しており、観測像が多数枚ある場合には、AD 法の改良版が実効的に利用されている<sup>7)</sup>。しかしながら、AD 法には収束性がないという欠点があり、AD 法は信頼性に乏しい方法であるといわざるをえない。特に、明確にサポート条件を適用できない場合には、観測像にノイズが含まれていない場合でさえも完全解を得られる場合が少ないという問題点を有している。このた

め、提案時には像領域の拘束条件として非負条件のみが用いられたが、最近ではサポート条件を併用することが一般的である。

一方、Lane の conjugate gradient 法 (以後 Lane 法と略記する) は適当なコスト関数を導入して、この値が小さくなるように原像とぼけ関数の推定像を逐次変化させていく方法である。この方法は、コスト関数が単調減少するのでアルゴリズムへの信頼性が高いが、コスト関数が極小となる物体に停滞しやすいという問題点を有している。

本論文では、AD 法と Lane 法の両方の手法を利用して、コスト関数の減少を計りつつ物体領域の拘束条件を繰り返し適用するという新しいブラインドデコンボリューション法を提案する。まず第 2 章において AD 法、Lane 法について概観し提案法構築のための準備を行う。次に第 3 章において提案アルゴリズムを構築し、その有効性を検証する。最後にまとめを第 4 章で行う。

## 2. AD 法, Lane 法

観測像  $g(x, y)$  は、原像  $f(x, y)$  およびぼけ関数  $h(x, y)$  とのたたみ込みとして、式 (1) のように表されるものとする。これを単に

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y) \quad (2)$$

と記す。このとき、観測像のフーリエ変換  $G(u, v)$  は、原像のフーリエ変換  $F(u, v)$  およびぼけ関数のフーリエ変換  $H(u, v)$  とを用いて

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) \quad (3)$$

と表現できる。 $(x, y)$  は像領域のサンプル点、 $(u, v)$  はフーリエ領域の空間周波数を表す。像領域の変数を小文字で、そのフーリエ変換を大文字で記述する。

AD 法は、Fig. 1 に示すように、像領域の拘束条件とフィルター処理とを繰り返し適用して原像を得ようとする方法である。フィルター処理には、インバースフィルターやウィナーフィルターが用いられ、 $m$  回目の原像の候補  $f_m(x, y)$  は、ぼけ関数の推定  $\hat{h}_m(x, y)$  のフーリエ変換  $\hat{H}_m(u, v)$  と観測像のフーリエ変換  $G(u, v)$  とから

$$F_m(u, v) = \frac{G(u, v)}{\hat{H}_m(u, v)} \quad (4)$$

などとして得られる値を逆フーリエ変換して求められる<sup>5,8)</sup>。こうして得られた原像の候補に対して、像領域の拘束条件が適用される。ここで像領域の拘束条件には、像の非負性や観測像のサポートあるいは原像のサポートが用いられ、フィルター処理を経て得られた原像の候補像  $f_m(x, y)$  から

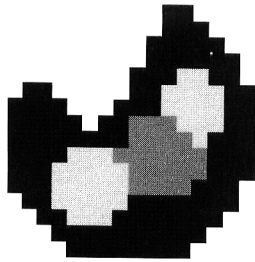


Fig. 2 Original image.

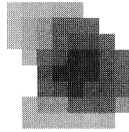


Fig. 3 Blur function (Point spread function).

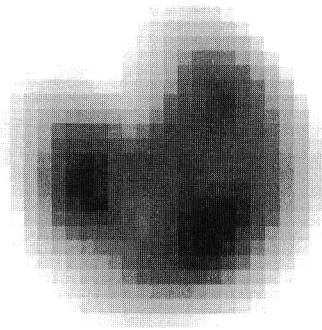


Fig. 4 Measured image obtained by convolving the original image shown in Fig. 2 with the blur function shown in Fig. 3.

$$\hat{f}_{m+1}(x, y) = \begin{cases} f_m(x, y) & (x, y) \notin \gamma_{fm} \\ 0 & (x, y) \in \gamma_{fm} \end{cases} \quad (5)$$

として  $m+1$  回目の原像の推定像  $\hat{f}_{m+1}(x, y)$  が得られる。ここで、 $\gamma_{fm}$  は、原像の候補像  $f_m(x, y)$  の値が負であるサンプル点またはサポート外のサンプル点の集合である。同様の処理を施して、ぼけ関数の推定  $\hat{h}_m(x, y)$  も得られる。以上に示したように、AD 法は原像やぼけ関数に対する先験的知識をアルゴリズム内に簡単に取り込めるという利点を有しており、繰り返し回数の初回に投入する初期像の値に依存することなく、ある程度の回復度が得られることが知られている<sup>4)</sup>。しかしながら、特に像領域の拘束条件としてサポート条件を用いることができない場合には、繰り返しごとの挙動が不安定で収束の保証がなく、観測像にノイズ成分が存在しない場合でも完全解が得られるとは限らないという欠点を有している。

原像  $f(x, y)$  を Fig. 2, ぼけ関数  $h(x, y)$  を Fig. 3 とするとき、観測像  $g(x, y)$  は Fig. 4 となる。この観測像に対して、AD 法を用いて回復を試みた場合の原像の回復像の一例を Fig. 5 に示す。像領域の拘束条件には非負条件のみを用いており、サポート条件は用いていない。この

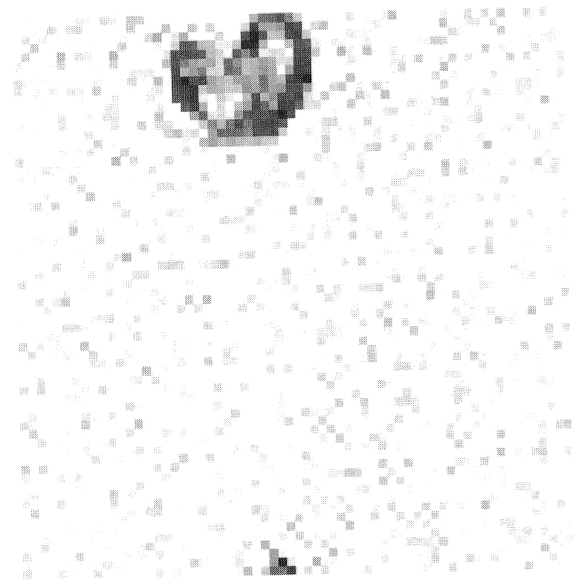


Fig. 5 Reconstructed image by the AD method. Support constraint is not used in this procedure.

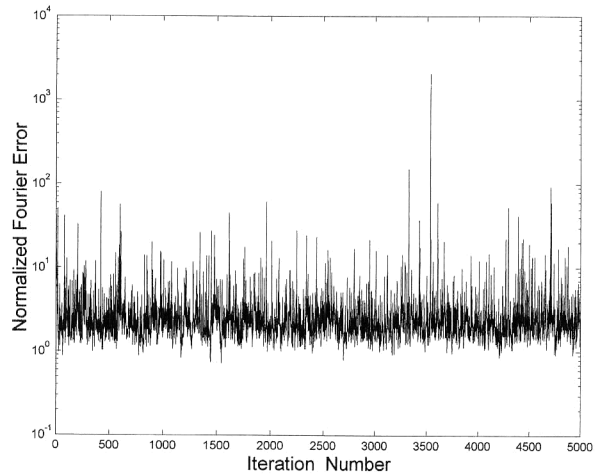


Fig. 6 Normalized Fourier error vs. the iteration number for the case in which the AD method is employed.

回復像は、100 通りの初期物体を用いて、おのおのについて 10 万回の繰り返し処理を実行した結果、最も回復度のよかった回復像である。完全回復には至っていないことがわかる。Fig. 5 の回復像が得られたときの各繰り返し回数に対するフーリエエラーの変化を、最初の 5000 回分について Fig. 6 に示す。ここで、繰り返し回数  $m$  回目のフーリエエラー  $E_{fm}^2$  は

$$E_{fm}^2 = \sum |G(u, v) - \hat{F}_m(u, v) \hat{H}_m(u, v)|^2 \quad (6)$$

と表されるが、Fig. 6 ではこの値を観測像のエネルギー  $\sum |G(u, v)|^2$  で規格化した値の平方根にして示している。この図から、AD 法はエラーの挙動が不安定であり、収束性がないことがわかる。このように、AD 法ではある程度の回復度が得られるものの、サポート条件がない場合には

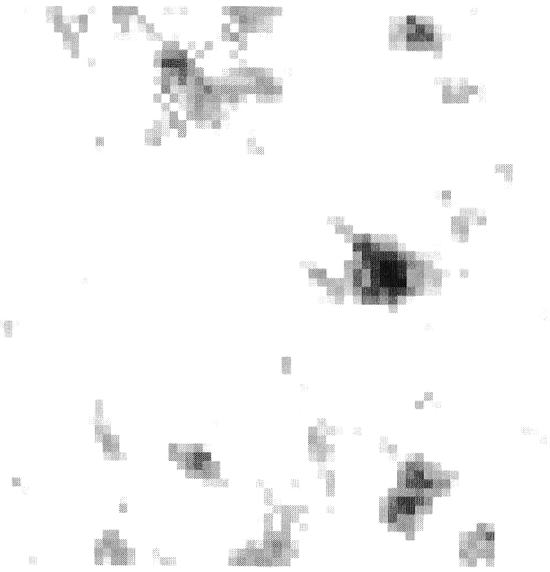


Fig. 7 Reconstructed image by Lane's method. Support constraint is not used in this procedure.

完全解を得るのは困難である。

繰り返し回数ごとの挙動に不安定性が生じるのは、式(3)から導かれた式(4)のようなフィルター処理を施すことに原因があるとLaneは指摘している<sup>6)</sup>。Laneは、アルゴリズムに収束性をもたせるために、式(6)のフーリエエラーと次式で定義される像領域における推定エラー $E_i^2$ ;

$$E_i^2 = \sum_{(x,y) \in \mathcal{I}} |f(x,y)|^2 + \sum_{(x,y) \in \mathcal{M}} |h(x,y)|^2 \quad (7)$$

との和 $E_c^2$ ;

$$E_c^2 = E_i^2 + E_f^2 \quad (8)$$

をコスト関数として採用し、このコスト関数が減少するように $f(x,y)$ ,  $h(x,y)$ を変化させてゆくアルゴリズムを提案した<sup>6)</sup>。この方法は、像領域の拘束条件としてサポート条件を用いることができる場合には、収束性のある強力な方法として受け入れられている。しかしながら、コスト関数が像領域のエラーとフーリエ領域のエラーという2つの性質の異なるエラー関数の線形和であるために、コスト関数の $f(x,y)$ ,  $h(x,y)$ に対する変化が複雑となり、したがってこの方法はアルゴリズムがコスト関数 $E_c$ の極小となる像に停滞しやすいという欠点を有している。さらにLane法では、式(7)からわかるように、像領域のエラー $E_i^2$ が原像の推定エラーとぼけ関数の推定エラーとの和であるため、原像とぼけ関数のどちらか一方のエネルギーが他方に比べて小さくなった場合、その像の値の変化がエラー $E_i^2$ の変化に反映されにくいという欠点も有している<sup>9)</sup>。特に像領域の拘束条件としてサポート条件を用いる

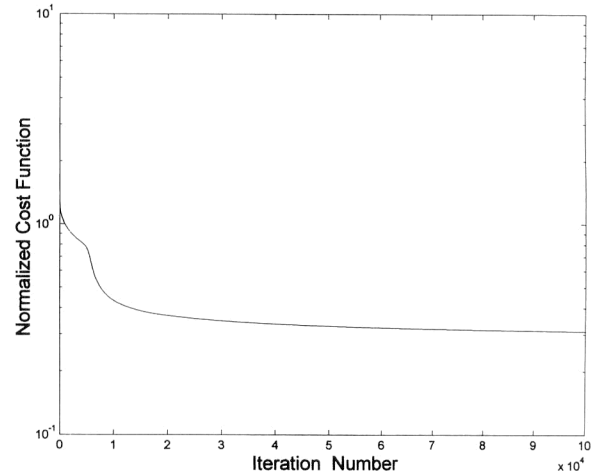


Fig. 8 Normalized cost function vs. the iteration number for the case in which Lane's method is employed.

ことができない場合には、この欠点が顕著となる。Fig. 7は、Fig. 4に示した観測像 $g(x,y)$ からLane法を用いて回復した例である。像領域の拘束条件には非負条件のみを用い、サポート条件は用いていない。Fig. 8は、この際の繰り返し回数に対するコスト関数の変化である。ただし、コスト関数を観測像のエネルギーで規格化した値の平方根を示している。Fig. 8から繰り返し回数に対してコスト関数 $E_c^2$ が減少していることがわかるが、その回復像は時としてFig. 7のように回復度の非常に悪い場合を生じてしまう。このことは、コスト関数が深い極小値となって、Lane法によっては回避できないような像が解から大きくはずれて存在していることを示している。AD法で用いたものと同じ100通りの初期物体に対して、Lane法では約10%しか完全解が得られなかった。このようにLane法は、サポート条件を用いることができない場合には、強力な方法であるとはいえない。

### 3. 提案アルゴリズム

AD法が収束性に乏しく不安定な挙動を示す原因は、Laneも指摘しているように<sup>9)</sup>、Fig. 1におけるフィルターの部分であると考えられる。しかしながら、Lane法のようにコスト関数に像領域とフーリエ領域の両方のエラーを加えたものを用いると、コスト関数の像に対する変化が複雑になってしまう。そこで筆者らは、AD法のフィルターの部分を収束性のある処理に改めることを考えた。すなわち、繰り返し回数 $m$ 回目の推定像 $\hat{f}_m(x,y)$ 、推定ぼけ関数 $\hat{h}_m(x,y)$ に対するフィルター処理の部分を

$$f_m(x,y) = \hat{f}_m(x,y) - \alpha_{fm} \frac{\partial E_{fm}^2(\hat{f}_m(x,y), \hat{h}_m(x,y))}{\partial \hat{f}_m(x,y)} \quad (9)$$

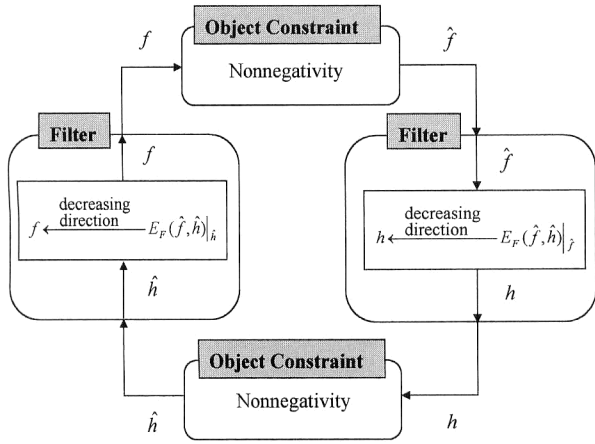


Fig. 9 Block diagram of the proposed method.

とする。すなわち、フーリエエラーをコスト関数として採用し、この値が小さくなるように像  $\hat{f}_m(x, y)$  の値を変化させる。このときの変化量を定めるパラメータ  $\alpha_{fm}$  はフーリエエラーが最も小さくなるように最急降下法的に決めた値であり、

$$\alpha_{fm} = \frac{\sum \text{Re}[\{G(u, v) - \hat{F}_m(u, v) \hat{H}_m(u, v)\} \hat{H}_m^*(u, v) D_{fm}^*(u, v)]}{\sum |\hat{H}_m(u, v)|^2 |D_{fm}(u, v)|^2} \quad (10)$$

として与えられる (付録参照)。ただし、

$$D_{fm}(u, v) = \mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial E_{fm}^2(\hat{f}_m(x, y), \hat{h}_m(x, y))}{\partial \hat{f}_m(x, y)} \right\} \quad (11)$$

であり、\* は複素共役を、 $\mathfrak{F}$  はフーリエ変換を表す。こうして得られた像  $f_m(x, y)$  に像領域の拘束条件を適用して、 $m+1$  回目の原像の推定像  $\hat{f}_{m+1}(x, y)$  を

$$\hat{f}_{m+1}(x, y) = \begin{cases} f_m(x, y) & (x, y) \in \gamma_{fm} \\ 0 & (x, y) \in \gamma_{fm} \end{cases} \quad (12)$$

として得る。 $h_m(x, y)$  は、 $\hat{f}_{m+1}(x, y)$  を用いて、

$$h_m(x, y) = \hat{h}_m(x, y) - \alpha_{hm} \frac{\partial E_{fm}^2(\hat{f}_{m+1}(x, y), \hat{h}_m(x, y))}{\partial \hat{h}_m(x, y)}, \quad (13)$$

$$\alpha_{hm} = \frac{\sum \text{Re}[\{G(u, v) - \hat{F}_{m+1}(u, v) \hat{H}_m(u, v)\} \hat{F}_{m+1}^*(u, v) D_{hm}^*(u, v)]}{\sum |\hat{F}_{m+1}(u, v)|^2 |\hat{D}_{hm}(u, v)|^2}, \quad (14)$$

$$D_{hm}(u, v) = \mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial E_{fm}^2(\hat{f}_{m+1}(x, y), \hat{h}_m(x, y))}{\partial \hat{h}_m(x, y)} \right\} \quad (15)$$

として与えられるので (付録参照)、 $m+1$  回目のぼけ関数の推定像  $\hat{h}_{m+1}(x, y)$  を

$$\hat{h}_{m+1}(x, y) = \begin{cases} h_m(x, y) & (x, y) \in \gamma_{hm} \\ 0 & (x, y) \in \gamma_{hm} \end{cases} \quad (16)$$

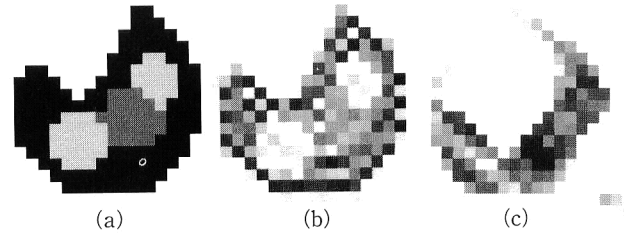


Fig. 10 Reconstructed images when the proposed method was run 100 times, each time with a different initial image. The algorithm converged to image (a), the correct solution, 50% of the time. Twenty-five percent of the time, the algorithm stagnated at image (b), and the rest of time, at image (c).

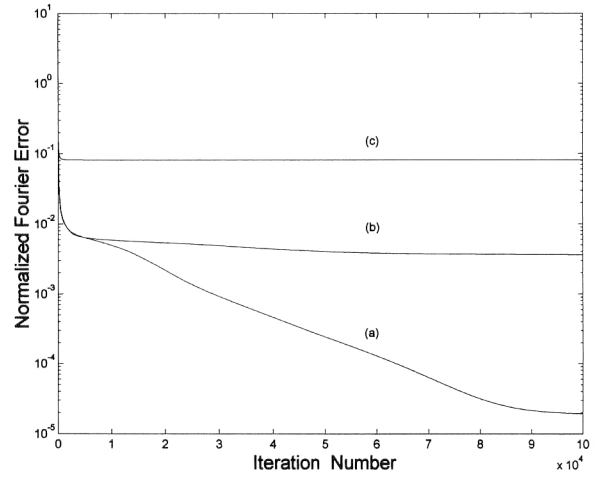


Fig. 11 Normalized Fourier error vs. the iteration number for the case in which the proposed method is employed. Curves (a), (b) and (c) denote the results for the case in which the algorithm converged to Fig. 10 (a), stagnated at Fig. 10 (b) and at Fig. 10 (c), respectively.

として得る。この一連の処理を模式的に Fig. 9 に示す。この処理には、式 (9)、式 (13) においてフーリエエラー  $E_F^2$  の微係数が必要となるが、式 (6) の定義より、

$$\frac{\partial E_F^2}{\partial \hat{f}_m(x, y)} = -2 \text{Re}[\mathfrak{F}^{-1}\{\hat{H}_m^*(u, v) (G(u, v) - \hat{F}_m(u, v) \hat{H}_m(u, v))\}], \quad (17)$$

$$\frac{\partial E_F^2}{\partial \hat{h}_m(x, y)} = -2 \text{Re}[\mathfrak{F}^{-1}\{\hat{F}_{m+1}^*(u, v) (G(u, v) - \hat{F}_{m+1}(u, v) \hat{H}_m(u, v))\}] \quad (18)$$

として得られる。ここで、 $\mathfrak{F}^{-1}$  は逆フーリエ変換を表している。

本アルゴリズムを用いて、Fig. 4 の観測像から回復した推定像を Fig. 10(a), (b), (c) に示す。像領域の拘束条件にはサポート条件を用いず、非負条件のみを用いている。Fig. 10(a) では完全回復している。Fig. 10(b) と (c)

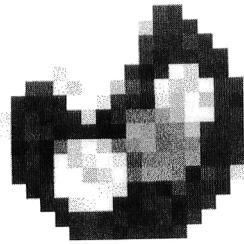


Fig. 12 Reconstructed image for the case in which the noise rate  $Nr$  is 1%.

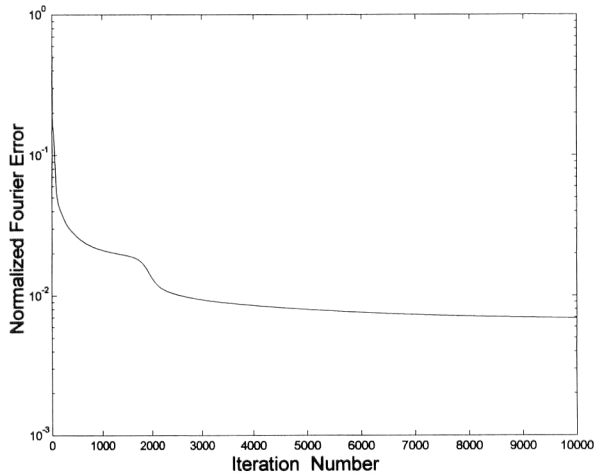


Fig. 13 Normalized Fourier error vs. the iteration number for the case in which the algorithm converged to Fig. 12.

は原像と異なる像に停滞した例である。Fig. 10(a), (b), (c) の場合の繰り返し回数に対するフーリエエラーの変化を Fig. 11 に示す。ただし、Fig. 6 と同様に、観測像のエネルギーで規格化した値の平方根にして示している。Fig. 11 から明らかなように、本提案法は AD 法とは異なり収束性を有していることがわかる。

100 通りの初期物体を用いて回復を試みた結果、50%が Fig. 10(a) に収束し完全回復した。また、25%が Fig. 10(b) に、25%が Fig. 10(c) に収束した。これに対して、第 2 章で示したように、AD 法では完全解となる例はなく、Lane 法では完全解を得られる場合が約 10%にすぎず、Fig. 7 に示すような不完全な回復像となる場合が非常に多かった。

このように本提案法は常に完全解を得られる方法ではないが、AD 法や Lane 法に比べて高い確率で完全解を得ることができた。このことは、本提案法における停滞物体の数が Lane 法における停滞物体の数に比べて少ないことを意味しているが、これは以下のように説明することができる。本提案法では、フーリエエラー  $E_f^2$  が極小値となる像に収束しようとする。この像が非負条件から大きくはずれている場合には非負条件の適用によって極小点から脱出す

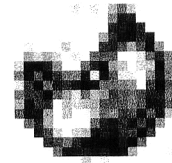


Fig. 14 Reconstructed image for the case in which the noise rate  $Nr$  is 3%.

ることができるが、非負条件の適用によっても脱出できない場合にはこの像にとどまることになる。したがって、本提案法は、非負条件をほとんど満たしてフーリエエラーが極小となる像を回復像として得ようとする方法であり、このために Lane 法に比べて解から大きくはずれた解に収束する可能性が小さく、収束像の数もかなり少なくなると考えられる。

観測像がノイズによって乱された場合については今後詳細な検討が必要であり、ここでは数例の回復結果を示すにとどめる。ノイズが信号に依存せず付加的である場合、すなわち観測像  $g(x, y)$  がノイズ  $n(x, y)$  によって乱されて、

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y) + n(x, y) \quad (19)$$

と表される場合の回復例を示す。原像  $f(x, y)$  とぼけ関数  $h(x, y)$  とのたたみ込みにガウス分布の乱数を加え、正值性を保つために絶対値をとった値を観測像とした。Fig. 12 は、観測像に含まれるノイズの割合  $Nr$  が 1%である場合に、本提案法を用いて回復した推定像である。ただし、ノイズの割合  $Nr$  は、

$$Nr = \sqrt{\frac{\sum |g(x, y) - f(x, y) \otimes h(x, y)|^2}{\sum |f(x, y) \otimes h(x, y)|^2}} \quad (20)$$

と定義する。Fig. 13 に、このときの繰り返し回数に対するフーリエエラーの変化を示す。観測像にノイズ成分が存在する場合にも、収束特性を保持していることがわかる。Fig. 14 には、ノイズの割合  $Nr$  が 3%の場合の推定像を示す。Fig. 12, Fig. 14 からわかるように、本提案法では

ノイズの割合の増加とともに推定像の回復度は徐々に低下し、ノイズの存在によって回復が突然破綻するという事はなかった。この特性は、アルゴリズムの実用性にとって重要であると考えられる。

#### 4. 考察とまとめ

提案法は、像領域の拘束条件を繰り返し適用できるというAD法の利点と、収束特性を有するというLane法の利点とを取り込もうとした方法である。従来のブラインドデコンボリューション法では像領域の拘束条件としてサポート条件が必須であったが、本提案法によればサポート条件を用いず非負条件のみを用いても完全解を得ることができると示された。この結果は、ブラインドデコンボリューションを実現するにあたり、非負条件が従来考えられてきた以上に強力となりうることを示している。

本提案法は、フーリエエラーをコスト関数として用いつつ、像領域においてAD法と同様の非負拘束処理を施す方法である。すなわち、本提案法はフーリエエラーが極小でありかつ非負条件を満足する像を回復像として得ようとする手法であるため、停滞物体の数がLane法に比べて少なく完全解を得る確度が高くなったと考えられる。

完全回復の確度をさらに高めるには初期物体としてAD法による推定像を用いればよいが、常に完全解が得られるとは限らないという本質的な問題は残されている。さらに、観測像にノイズが存在する場合の詳細な検討やアルゴリズムの高速化など、残された課題は多い。しかしながら、像領域の拘束条件としてサポート条件を用いず非負条件のみを用いた場合のブラインドデコンボリューションについて、実現の可能性のあることが示された意義は大きいと筆者らは考えている。

#### 文 献

- 1) R. G. Lane and R. H. T. Bates: "Automatic multidimensional deconvolution," J. Opt. Soc. Am. A, **4** (1987) 180-188.
- 2) 高城洋明, 高橋 徹, 黒木洋光: "収束性の保証されたブラインドデコンボリューション法", 光学, **25** (1996) 55-57.
- 3) 黒木洋光, 高城洋明, 高橋 徹: "位相回復および振幅回復アルゴリズムを用いたブラインドデコンボリューション法の特性", 光学, **26** (1997) 47-50.
- 4) D. Kundur and D. Hatzinakos: "Blind image deconvolution," IEEE Signal Process. Mag., **13** (1996) 43-64.
- 5) G. R. Ayers and J. C. Dainty: "Iterative blind deconvolution method and its applications," Opt. Lett., **13** (1988) 547-549.
- 6) R. G. Lane: "Blind deconvolution of speckle images," J. Opt. Soc. Am. A, **9** (1992) 1508-1514.
- 7) N. Miura and N. Baba: "Segmentation-based multiframe blind deconvolution of solar images," J. Opt. Soc. Am. A, **12** (1995) 1858-1866.
- 8) B. L. K. Davey, R. G. Lane and R. H. T. Bates: "Blind

deconvolution of noisy complex-valued image," Opt. Commun., **69** (1989) 353-356.

- 9) Y. Yang, N. P. Galatsanos and H. Stark: "Projection-based blind deconvolution," J. Opt. Soc. Am. A, **11** (1994) 2401-2409.

#### 付録 式(10), 式(14)の導出

式(9)において、 $\hat{f}_m(x, y)$  からの変化量を決めるパラメーター  $\alpha_{fm}$  は、式(9)によって与えられる  $f_m(x, y)$  を用いたフーリエエラー  $E_F^2$  の値が最も小さくなるように決定する。すなわち、

$$\frac{\partial E_F^2(f_m(x, y), \hat{h}_m(x, y))}{\partial \alpha_{fm}} = 0 \quad (A1)$$

を満たす  $\alpha_{fm}$  を式(9)のパラメーターとして用いる。式(6)のフーリエエラーの定義から、式(A1)は

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{fm}} \sum |G(u, v) - \hat{F}_m(u, v) - \alpha_{fm} D_{fm}(u, v)| \hat{H}_m(u, v)|^2 = 0 \quad (A2)$$

と表すことができる。ただし、 $D_{fm}(u, v)$  はフーリエエラー  $E_F^2$  の  $\hat{f}_m(x, y)$  に対する導関数(式(17))のフーリエ変換(式(11))である。式(A2)より

$$2 \sum \text{Re} \{ [G(u, v) - \hat{F}_m(u, v) \hat{H}_m(u, v)] \hat{H}_m^*(u, v) D_{fm}^*(u, v) \} + 2 \alpha_{fm} \sum |\hat{H}_m(u, v)|^2 |D_{fm}(u, v)|^2 = 0 \quad (A3)$$

となるので、パラメーター  $\alpha_{fm}$  の値は式(10)、すなわち

$$\alpha_{fm} = \frac{\sum \text{Re} \{ [G(u, v) - \hat{F}_m(u, v) \hat{H}_m(u, v)] \hat{H}_m^*(u, v) D_{fm}^*(u, v) \}}{\sum |\hat{H}_m(u, v)|^2 |\hat{D}_{fm}(u, v)|^2} \quad (A4)$$

として与えられる。

同様にして、式(13)において  $\hat{h}_m(x, y)$  からの変化量を決めるパラメーター  $\alpha_{hm}$  は、式(13)によって与えられる  $h_m(x, y)$  と式(12)によって与えられる  $\hat{f}_{m+1}(x, y)$  を用いたフーリエエラーの値が最も小さくなるように決定する。すなわち、

$$\frac{\partial E_F^2(\hat{f}_{m+1}(x, y), h_m(x, y))}{\partial \alpha_{hm}} = 0 \quad (A5)$$

を満たすように  $\alpha_{hm}$  を決定する。フーリエエラーの  $\hat{h}_m(x, y)$  に対する導関数(式(18))を用いると、 $\alpha_{hm}$  は式(14)すなわち

$$\alpha_{hm} = \frac{\sum \text{Re} \{ [G(u, v) - \hat{F}_{m+1}(u, v) \hat{H}_m(u, v)] \hat{H}_m^*(u, v) D_{hm}^*(u, v) \}}{\sum |\hat{F}_{m+1}(u, v)|^2 |\hat{D}_{hm}(u, v)|^2} \quad (A6)$$

として与えられる。