

# 画像回復・再構成

三浦 則明・桑村 進

## Image Restoration and Reconstruction

Noriaki MIURA and Susumu KUWAMURA

This lecture contents two sections on image restoration and image reconstruction from projections. The former section deals with an inverse filter, a Wiener filter and a maximum likelihood method for image restoration. The latter is devoted to theoretical description on image reconstruction from projections on the basis of the projection-slice theorem. Three-dimensional computer tomography is also introduced.

**Key words:** inverse problem, image restoration, image reconstruction from projections

装置の特性や性能, また環境の影響によって, 観測されるデータが変質してしまい, 欲しい情報が直接手に入らないということはさまざまな分野で起こる. このような場合に, 得られたデータから本来の情報を求める逆問題 (inverse problem) は, 光学の分野においても非常に重要なテーマである. 逆問題の中でも特に本講義では, 何らかの要因によって劣化した画像から本来の画像を回復する「画像回復」, および, X線などを物体に照射して得られる投影データから, その物体内部の物理量の分布を画像化する「投影からの画像再構成」について概説する. なお, 本稿は画像回復と画像再構成の2部立てとし, それぞれの執筆を三浦, 桑村が担当する.

### 1. 画像回復<sup>1-9)</sup>

#### 1.1 画像回復問題の定式化<sup>1-3)</sup>

いま, 物体を  $o(x, y)$ , 光学系の特性を規定する点広がり関数 (point spread function: PSF) を  $p(x, y)$  とする. PSFの形が結像位置に依存しないと仮定すると, 観測される画像は

$$s(x, y) = o(x, y) * p(x, y) \quad (1)$$

と表すことができる. ここで, \* はコンボリューション演算を表す.

ここで考える画像回復問題は, PSF  $p(x, y)$  が既知の場合に,

観測された  $s(x, y)$  から, できれば  $o(x, y)$  そのもの, それが無理であれば  $o(x, y)$  の情報をなるべく再現したものを得ることである. この操作のことをデコンボリューション (deconvolution) という.

#### 1.2 逆フィルターによる画像回復<sup>1-3)</sup>

##### 1.2.1 逆フィルター

式(1)を二次元フーリエ変換すると,

$$S(u, v) = O(u, v)P(u, v) \quad (2)$$

となる. 大文字の関数は対応する小文字の関数のフーリエ変換を表している.  $(u, v)$  は空間周波数座標である. いま,  $P(u, v)$  は既知なので, 観測量  $S(u, v)$  を割ると,

$$R_{inv}(u, v) \equiv S(u, v)/P(u, v) = O(u, v) \quad (3)$$

となり, 数式上は  $O(u, v)$  が得られ, これを逆フーリエ変換すればもとの物体が得られそうである. ここで,  $1/P(u, v)$  を逆フィルター (inverse filter) という. 式(3)は, 観測量  $S(u, v)$  に逆フィルターを掛けるともとの物体の推定が得られることを表す式と解釈できる.

##### 1.2.2 ノイズの存在

逆フィルターにおける深刻な問題点は, 観測像には通常ノイズが含まれているということである. 簡単のため, ここではノイズが加法的であり, 信号に依存しないと仮定する. すると, 観測像は  $i(x, y) = s(x, y) + n(x, y)$  と表すことができる. ここで  $n(x, y)$  がノイズを表す. これをフー

リエ変換して、逆フィルターを掛けると、

$$R_{inv}(u, v) \equiv I(u, v)/P(u, v) = O(u, v) + N(u, v)/P(u, v) \quad (4)$$

が得られる。この式は、式(3)に対しノイズに起因する第2項を加えたものとなっている。このノイズ項に関して考察してみよう。

$P(u, v)$  が  $N(u, v)$  よりも十分大きいところでは、式(4)の右辺第2項はほぼゼロとなり、逆フィルターと等価となる。逆に、 $P(u, v)$  がゼロに近い値をもつ領域では、この項は  $O(u, v)$  よりも大きくなってしまふ。図1はこの様子を示している。図1(a)に示されている  $I(u, v)$  を図1(b)の  $P(u, v)$  で割ったとき、得られる  $R_{inv}(u, v)$  は図1(c)のように、高空間周波数領域でノイズの影響が非常に大きくなる。このため、最終的に得られる画像は「回復」像といえるものではなくてしまふ。このようなことは、 $P(u, v)$  が帯域制限された関数である場合には普遍的に起こる。なぜなら、その遮断周波数のまわりでは通常、 $P(u, v)$  はゼロに近い値をもつからである。

結局、逆フィルターはほとんど実用には耐えられないものであるといえる。画像回復の難しい点はノイズ対策であり、画像回復法の開発課題はいかにしてノイズに強い手法を開発するかにある。

### 1.3 ウィーナーフィルターによる画像回復<sup>1-3)</sup>

#### 1.3.1 ウィーナーフィルター

ウィーナーフィルター (Wiener filter) の設計における発想は、開発すべきフィルターを  $W(u, v)$  とし、このフィルターを観測画像に適用して、回復される画像と本来の物体との自乗誤差が最小になるように  $W(u, v)$  を決定する、というものである。こうして得られるフィルターは、

$$W(u, v) = \frac{P^*(u, v)}{|P(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2 / |O(u, v)|^2} \quad (5)$$

という形になる。ここで、 $|N(u, v)|^2$  はノイズのパワースペクトル、 $|O(u, v)|^2$  は物体のパワースペクトルである。関数の右肩の\*は複素共役を表す。ここで問題となるのは、不明量である  $|N(u, v)|^2$  と  $|O(u, v)|^2$  をどう決定するかである。最も簡単な方法は、かなり乱暴であるが、 $|N(u, v)|^2 / |O(u, v)|^2$  を定数  $\alpha$  と置いてしまうことである。 $\alpha$  の値は実験的に決定することになる。別の方法は分母第2項を  $\beta/L(u, v)$  と置くことである。ここで、 $\beta$  は適当な定数である。 $L(u, v)$  としては、 $|O(u, v)|^2$  の形状をよく反映する関数を使用するのがよい。

#### 1.3.2 式の解釈<sup>4)</sup>

ノイズがない場合、あるいは信号に比べてノイズが十分

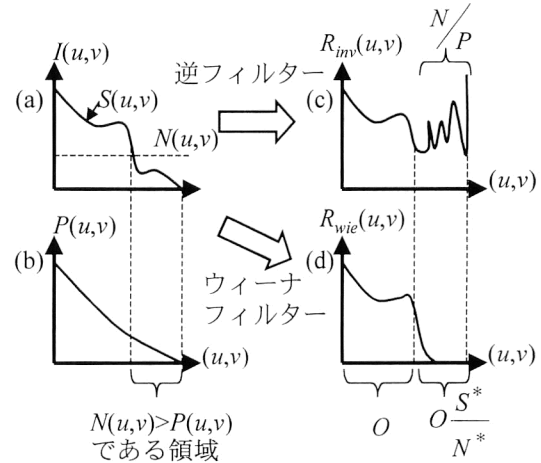


図1 画像回復の模式図。(a), (b) 観測画像とPSFのスペクトル。(c), (d) (a)に対して、それぞれ逆フィルターとウィーナーフィルターを適用して得られるスペクトル。

に小さな場合には、式(5)の分母第2項がゼロとなり、式(3)の逆フィルターと同じ形になることがわかる。結局、このウィーナーフィルターは、逆フィルターに分母第2項のノイズに関係した項をつけ加えたものとなっている。この項の性質をもう少し考察してみよう。

式(5)のフィルターと観測像を掛け合わせて回復像を得るわけであるが、これを式で書くと

$$R_{wie}(u, v) = W(u, v) I(u, v) = [O(u, v) + N(u, v)/P(u, v)] \frac{1}{1 + \epsilon(u, v)} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\epsilon(u, v) = |N(u, v)|^2 / |S(u, v)|^2$  である。さて、ノイズのほうが決定的な場合  $\epsilon(u, v) \gg 1$  を考えよう。この場合、 $\{1 + \epsilon(u, v)\}^{-1} \approx \epsilon(u, v)^{-1}$  と近似できる。ここでの条件から、右辺第1項より第2項のほうが大きいことは明らかなので、第2項だけ取り出してみると、

$$\frac{N(u, v)}{P(u, v)} \frac{1}{\epsilon(u, v)} = O(u, v) \frac{S^*(u, v)}{N^*(u, v)} \quad (7)$$

となる。この式は求めたい  $O(u, v)$  に信号とノイズの比が掛けられた形をしている。つまり、SN比の悪いところほど得られるスペクトルの絶対値を小さく抑え、回復像に影響を与えないようにしているのである。ただし、遮断周波数付近での回復値が小さく抑えられるので(図1(d))、画像が少しぼけたものになることは避けられない。

### 1.4 最尤法による画像回復<sup>4-6)</sup>

#### 1.4.1 最尤法

画像回復を、最尤法 (maximum likelihood method) という反復型デコンボリューション法を用いて行うことも頻繁に行われている。最尤法では、光子検出がポアソン確率過程に従うこと、観測像に含まれるノイズが光子ノイズだ

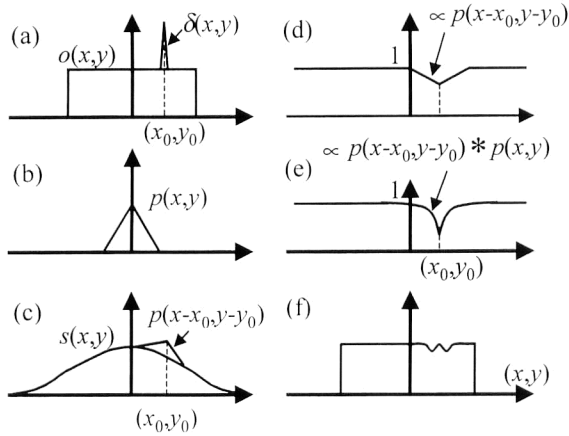


図2 最尤法による画像回復のメカニズム. (a) 推定物体  $o^{\text{old}}$ . 真の物体 (矩形) にインパルス状ノイズが付加されていると想定. (b) は PSF, (c) は (a) と (b) とのコンボリューション. ノイズのない場合のコンボリューション  $s$  に, ノイズに起因する成分  $p$  が加えられている. (d) は (c) を用いて  $s$  を割ったものである. これと  $p$  との相関をとることにより, 含まれていた誤差と同じ位置に鋭いくぼみができる (e). (e) と (a) を掛け合わせることで, 得られる  $o^{\text{new}}$  では誤差が抑制される (f).

けであると仮定する. すると, 入射強度  $s(x, y)$  に対して  $i(x, y)$  が観測される確率モデルを決定できる. このモデルに基づいて, 推定した物体と PSF とのコンボリューションが, 観測された像に対してどれくらい整合性があるかを評価する尤度とよばれる量を定義する. この尤度を最大にするように解を求めると,

$$o^{\text{new}}(x, y) = o^{\text{old}}(x, y) \left[ \frac{i(x, y)}{o^{\text{old}}(x, y) * p(x, y)} \otimes p(x, y) \right] \quad (8)$$

が得られる. ここで,  $\otimes$  は相関を表す. この式を用いてデコンボリューションを行うには, 右辺に含まれる物体の推定  $o^{\text{old}}(x, y)$  に適当な初期推定を入力し, 左辺にある新しい推定  $o^{\text{new}}(x, y)$  を求める. これをさらに右辺の  $o^{\text{old}}(x, y)$  として用いることを繰り返すのである.

#### 1.4.2 式の解釈<sup>4)</sup>

まず, ノイズがない場合  $i(x, y) = s(x, y)$  を考えよう. 上式の反復が収束し,  $o^{\text{new}}(x, y) = o^{\text{old}}(x, y)$  となったとする. これは, 括弧内の割り算が定数 1 となる場合にだけ成立する. 結局, 推定した  $o^{\text{old}}(x, y)$  と PSF とのコンボリューションが  $s(x, y)$  に等しいということであり, 物体回復がうまくいっていることを意味する.

観測像にノイズが含まれる場合も上と同じように考えると, 推定量  $o^{\text{old}}(x, y)$  は  $i(x, y)$  を  $p(x, y)$  でデコンボリューションしたものと等価となる. ただし, 逆フィルターと異なり, フーリエ面での割り算を含まないため, ノイズを強調してしまうことがないという大きな利点をもつ.

次に, 推定に誤差が生じた場合に, 反復によってそれがどのように修正されるのかというメカニズムを簡単に図で説明しよう. ここでは, 物体推定中の 1 点に誤差が入った場合を考える (図 2(a)). また, PSF は図 2(b) のような形状とする. これらを用いて式 (8) と同じ操作を試みよう. 両者のコンボリューションは, 図 2(c) のように, 本来の  $s(x, y)$  に PSF を加えたものとなる. これを用いて  $s(x, y)$  を割り (図 2(d)), さらにその商と  $p(x, y)$  との相関を計算すると, 近似的に図 2(e) のようになる.  $p(x, y)$  の自己相関に起因する鋭いくぼみが生じている. これを, もとの物体の推定に掛けると, そこに含まれていた誤差と相殺し合い, より真の物体に近づくことがわかる (図 2(f)).

#### 1.4.3 超解像効果<sup>7)</sup>

最尤法において最も興味深い特徴としては, この方法には超解像 (superresolution) 効果が含まれているという点が挙げられる. これは, 式 (8) の右辺が積の形になっていることに起因している. つまり, この演算が空間周波数面ではコンボリューション演算となり, 結果として得られる画像の遮断周波数が大きくなるためである. 例えば, PSF がある遮断周波数  $f_c$  をもつとき, 式 (8) の括弧内に示される相関項の遮断周波数は常に  $f_c$  となる.  $o^{\text{old}}(x, y)$  の初期推定の遮断周波数が  $f_0$  であるとする. 反復回数が  $k$  のとき,  $o^{\text{new}}(x, y)$  の遮断周波数は  $(f_0 + kf_c)$  となる. 注意すべきなのは,  $(f_0 + kf_c)$  が画像のナイキスト周波数 (Nyquist frequency) を簡単に超えてしまうということである. このため, 多数回の反復後に得られる画像には, エイリアジング (aliasing) の影響で細かなアーティファクトがたくさん生じてしまう. この影響を抑えるため行われるひとつの方法は, 観測画像をさらに細かくサンプリングし直し, 極端なオーバーサンプリング状態にした後に最尤法を適用する方法である<sup>8)</sup>.

本章では, 従来の画像回復の解説とはアプローチを変え, 最終的に得られた式がどのような意味をもつのか, ノイズに対してどのような性能をもつのか, という点に焦点を絞って解説したつもりである. 特に, ウィナーフィルターに関して SN 比の悪い周波数帯での回復値を特徴づける式 (7) は, 筆者の知る限りどの教科書にも書かれていないが, 理解しやすい結果であると思う. なお, 最近の話題として, PSF が未知の場合にも画像回復を可能にするブラインドデコンボリューションも紹介したかったが, 誌面の都合で割愛せざるをえなかった. 興味のある方は文献 9) を参照願いたい.

## 2. 投影からの画像再構成<sup>10-19)</sup>

### 2.1 画像再構成問題の定式化<sup>10,11)</sup>

典型的な具体例として、X線CT (computed tomography) による人体断面上の吸収係数分布  $f(x, y)$  の画像化を考えよう。X線源から射出した細く絞られた線条ビーム (pencil beam)  $l$  を人体に照射し、反対側にある検出器で透過 X線の減弱率を測定することによって、線源と検出器を結ぶ直線  $l$  に沿った吸収係数の線積分値すなわち  $f(x, y)$  の投影データを得ることができる。いま、線条ビームの方向を  $x$  軸からの角度  $\theta$  で表し、 $x$ - $y$  直交座標系を  $\theta$  だけ回転させた  $s$ - $r$  座標系を設定する (図3)。 $\theta$  を固定し、ビーム  $l$  が平行移動するよう線源と検出器の対を走査させることによって、 $f(x, y)$  の  $r$  軸上への投影関数  $p_\theta(r)$  が得られる。さらに、線源と検出器の対を原点  $O$  を中心に回転させ、 $\theta$  を変えながら  $p_\theta(r)$  を求めていくことにより、 $r$  と  $\theta$  に関する2変数の投影関数  $p(r, \theta)$  が得られる。これをサイノグラム (sinogram) とよんでいる。この言葉の由来は、 $x$ - $y$  空間上の各点が、 $r$ - $\theta$  空間上では正弦波状の軌跡に対応していることによる。座標軸回転に対する座標変換公式を用いると、 $p(r, \theta)$  は  $f(x, y)$  の線積分として以下のように表される：

$$p(r, \theta) = \int f(x, y) dl = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \theta - r \sin \theta, s \sin \theta + r \cos \theta) ds \quad (9)$$

この  $f(x, y)$  から  $p(r, \theta)$  への積分変換はラドン (Radon) 変換とよばれる。こうして画像再構成問題は、 $p(r, \theta)$  から  $f(x, y)$  への逆ラドン変換を求める問題に帰着される。

### 2.2 投影断面定理<sup>10-12)</sup>

2章では、平行ビームCTについてのみ考える。ここで、平行ビームとは、一定方向の互いに平行な線条ビーム (直線経路) の束を意味している。平行ビームCTにおける二次元画像再構成問題は、すでに2章1節で  $f(x, y)$  に関する積分方程式(9)として定式化し、これを解析的に解くことによって数学的には解決される。しかし、その解の意味を理解し、有効な再構成アルゴリズムを構築するには、まず投影断面定理について理解しておく必要がある。

投影断面定理 (projection-slice theorem) は、投影関数  $p_\theta(r)$  のフーリエ変換  $P_\theta(\nu_r)$  が再構成画像  $f(x, y)$  のフーリエ変換  $F(\nu_x, \nu_y)$  とどのように関係しているかを述べたものである。なお、2章での表記上の規則として、フーリエ変換をもとの実関数の名前に対応する大文字で表し、空間周波数の座標軸成分をギリシャ文字  $\nu$  に座標変数名の添字をつけて表記する。投影断面定理は、ラドン変換式(9)の両辺を  $r$  に関してフーリエ変換することによ

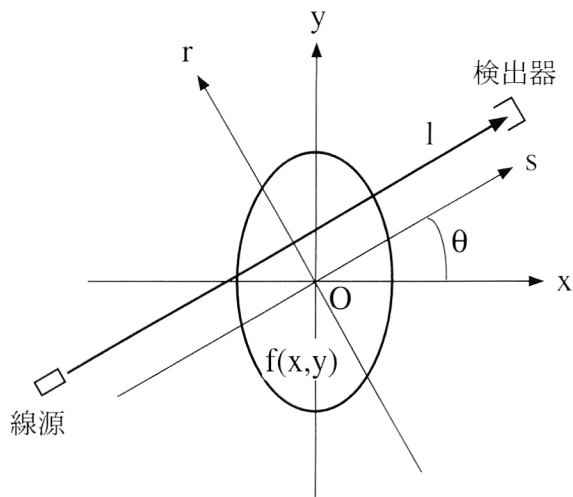


図3 典型的なCT (X線CT) の構成。

て得られる。結果のみ示すと、以下ようになる：

$$P_\theta(\nu_r) = F(-\nu_r \sin \theta, \nu_r \cos \theta) \quad (10)$$

この式は、「 $f(x, y)$  の  $r$  軸上への投影関数 (projection)  $p_\theta(r)$  の一次元フーリエ変換  $P_\theta(\nu_r)$  は、 $f(x, y)$  の二次元フーリエ変換  $F(\nu_x, \nu_y)$  の  $\nu_r$  軸に沿った断面 (slice または profile) を与える」ことを意味しており、これが投影断面定理の内容である。なお、実空間とフーリエ空間の座標軸回転に関する同等性より、 $\nu_x$ - $\nu_y$  座標軸に対する  $\nu_s$ - $\nu_r$  座標軸の関係は、 $x$ - $y$  座標軸に対する  $s$ - $r$  座標軸の関係とまったく同じである。

投影断面定理から、画像再構成が可能であるための投影データに関する十分条件が導かれる。すなわち、少なくとも  $0$  から  $\pi$  までの  $\theta$  に対して投影関数  $p_\theta(r)$  が得られれば、二次元のフーリエ空間全体にわたって  $F(\nu_x, \nu_y)$  の値がわかるから、これを逆フーリエ変換して未知画像  $f(x, y)$  を求めることができる。ただし、前提条件として、平行ビームは常に画像再構成の対象となる断面全体を覆っている必要がある。また、同じ直線に沿った互いに逆向きの投影データは、理論的には等しい。すなわち、投影方向  $\theta$  が  $\pi$  だけ異なる2つの投影関数は、まったく同じ情報をもっており、事実  $P_{\theta+\pi}(\nu_r) = P_\theta(-\nu_r)$  が成り立つ。

### 2.3 逆投影<sup>10-12)</sup>

一次元投影関数  $p_\theta(r)$  の二次元空間 ( $x$ - $y$  平面) への逆投影 (back-projection)  $b_\theta(x, y)$  は、

$$b_\theta(x, y) = p_\theta(-x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (11)$$

と定義される。逆投影は、 $s$  軸の正方向の線積分によって得られた投影関数を、その関数形を保ったまま投影方向とは逆向きに  $x$ - $y$  平面に戻す操作と表現できる。より正確にいうならば、 $\theta$  方向の逆投影  $b_\theta(x, y)$  は、 $r$  軸と平行な任意の断面が投影関数  $p_\theta(r)$  に等しい二次元関数となる。

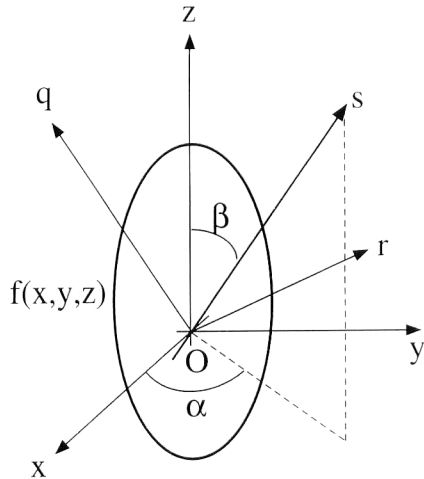


図4 三次元画像再構成問題を定式化するための座標系.

次に、角度  $\theta$  を変えながら投影関数  $p_\theta(r)$  の逆投影  $b_\theta(x, y)$  を  $x$ - $y$  平面上で重ね合わせて (加算して) いく処理を考える。この処理は、再構成画像  $f(x, y)$  の第1近似を与えるアルゴリズムで、逆投影法とよばれる。逆投影法で得られる画像、すなわち  $\int_0^\pi b_\theta(x, y) d\theta$  のフーリエ変換は、 $b_\theta(x, y)$  のフーリエ変換  $P_\theta(\nu_r) \delta(\nu_s)$  を  $\theta$  に関して0から  $\pi$  まで積分すれば求められる：

$$\int_0^\pi P_\theta(\nu_r) \delta(\nu_s) d\theta = F(\nu_x, \nu_y) \frac{1}{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}} \quad (12)$$

上式の左辺は、投影データの一次元フーリエ変換  $P_\theta(\nu_r)$  を二次元フーリエ空間の  $\nu_r$  軸に沿って埋め込み、0から  $\pi$  までの  $\theta$  に対して放射状に足していくことを意味する。この結果、逆投影法による再構成画像は、正しい画像  $f(x, y)$  に対し空間周波数  $\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$  に反比例した重みづけがなされ、低空間周波数成分が強調された画像となる。

## 2.4 フィルター補正逆投影法<sup>10-12)</sup>

前節で述べた単純な逆投影法では、 $f(x, y)$  の低空間周波数成分を過剰に見積もってしまうことがわかった。これを補正するには2通りの方式がある。1つは、単純逆投影法で再構成された画像を二次元フーリエ変換し、低空間周波数成分を抑制する二次元のフィルター関数を掛ける方式 (back-projection filtering method: BPF 法) である。式(12)から、この二次元フィルターとして  $\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$  を掛ければよいことがわかる。もうひとつの方式は、投影関数に低空間周波数成分を抑制する一次元フィルターをあらかじめ掛けておいてから、逆投影する方法である。これをフィルター補正逆投影法 (filtered back-projection: FBP 法) という。フーリエ空間におけるフィルター処理は、実空間における畳み込み積分 (convolution) と等価なので、両者の方式とも実空間上の処理だけで遂行できる。しかし、

FBP法のほうが、一次元データのフィルター処理で済むことと、CT装置の回転走査開始とともに処理を始め、走査終了時点で再構成画像を得ることができるという高速処理性の面で、より実用的である。

FBP法において、投影データ  $P_\theta(\nu_r)$  に掛けるべき補正フィルターの形は、投影断面定理から、二次元フーリエ空間上で掛けるべき補正フィルター  $\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$  の  $\nu_r$  軸に沿った断面すなわち  $|\nu_r|$  とすればよい。したがって、フィルター補正された投影関数  $g_\theta(r)$  は、次式で表される：

$$g_\theta(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\nu_r) |\nu_r| \cdot \exp(2\pi i \nu_r r) d\nu_r \quad (13)$$

$g_\theta(r)$  に単純逆投影法を適用して得られる画像  $\int_0^\pi g_\theta(-x \sin\theta + y \cos\theta) d\theta$  は、積分方程式(9)の1つの解であり  $f(x, y)$  に等しい。

## 2.5 三次元CTへの拡張<sup>13-18)</sup>

### 2.5.1 三次元投影断面定理

本節では、平行ビーム三次元CTにおいて、投影データから物体内部の三次元分布  $f(x, y, z)$  を再構成する三次元画像再構成問題を議論する。三次元画像再構成問題を解析的に定式化するに当たって適当な座標系を設定する (図4)。まず、測定対象の断面 ( $x$ - $y$  面) に垂直な長軸 (人体の場合は体軸) に沿った  $z$  軸を追加する。対象物体を覆う平行ビームに沿った  $f(x, y, z)$  の投影関数をビームと垂直な平面上で測定する。いま、 $x$ - $y$ - $z$  座標系に対して適当に回転させた  $s$ - $r$ - $q$  直交座標系を考え、 $s$  軸の向きを平行ビームの向きと一致させる。 $s$  軸の向きを  $x$  軸からの方位角  $\alpha$  と  $z$  軸からの偏角  $\beta$  で表す。このとき、 $s$  軸と垂直な投影面 ( $r$ - $q$  面) 上に投影された二次元の投影関数  $p_{\alpha\beta}(r, q)$  は、 $f(x, y, z)$  の線積分として次のように与えられる：

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta}(r, q) &= \int f(x, y, z) dl \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos\alpha \sin\beta - r \sin\alpha - q \cos\alpha \cos\beta, \\ &\quad s \sin\alpha \sin\beta + r \cos\alpha - q \sin\alpha \cos\beta, s \cos\beta + q \sin\beta) ds \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)の両辺を  $r$  と  $q$  に関して二次元フーリエ変換すると、三次元の投影断面定理の表式が得られる：

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(\nu_r, \nu_q) &= F(-\nu_r \sin\alpha - \nu_q \cos\alpha \cos\beta, \nu_r \cos\alpha \\ &\quad - \nu_q \sin\alpha \cos\beta, \nu_q \sin\beta) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $F(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$  は  $f(x, y, z)$  の三次元フーリエ変換を表す。また、三次元フーリエ空間における空間周波数軸の関係は、図4における空間座標軸のラベルを、対応する空間周波数軸のラベルに置き換えるだけでよい。式(15)の関係は三次元の投影断面定理として次のように表現でき

る：関数  $f(x, y, z)$  の  $r$ - $q$  平面への投影関数の二次元フーリエ変換  $P_{\alpha\beta}(v_r, v_q)$  は、 $f(x, y, z)$  の三次元フーリエ変換を  $v_r$  軸と  $v_q$  軸が張る平面 (原点を通る)  $\Sigma_{r,q}$  に沿ってみた断面を与える。

二次元画像再構成の場合と同様、二次元投影関数  $p_{\alpha\beta}(r, q)$  の三次元空間への逆投影  $b_{\alpha\beta}(x, y, z)$  が定義できる。また、測定された二次元の投影データに単純逆投影法を適用し、第1近似の再構成画像を得ることができる。この画像から正しい三次元画像  $f(x, y, z)$  を得るには、まず次項で述べる冗長性を補正するフィルターを掛けてから、空間周波数に比例したフィルター  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  を掛ける必要がある。

### 2.5.2 冗長性

投影断面定理より、三次元画像再構成が可能であるための十分条件は、投影関数のフーリエ変換値が三次元のフーリエ空間全体を埋め尽くすよう投影データを取得することである。例えば、平行ビームを  $z$  軸のまわりに 180 度回転することによって得られる投影データ ( $\beta = \pi/2, \alpha = 0 \sim \pi$ ) は、この十分条件を満足する最小限のデータである。これは、各断面ごとの二次元 CT を  $z$  軸方向に積み重ねる多層型の三次元 CT またはマルチスライス CT (multi-slice CT)<sup>15)</sup> と同じである。

他方、必要最小限以上の冗長な投影データを取得することにより、再構成画像の信号対雑音比を著しく向上させることができる。その典型例として、三次元モードの陽電子放射型 CT (positron emission tomography, PET)<sup>16,17)</sup> がある。PET では、 $\beta = \pi/2 - \Psi_0 \sim \pi/2 + \Psi_0$  ( $\Psi_0$  を受容角という) および  $\alpha = 0 \sim 2\pi$  の投影方向に対してデータが得られる。冗長な投影データを含む三次元 CT は、多層 CT に還元できず、1つの三次元画像再構成問題として扱う必要がある。

冗長な投影データを含むすべてのデータを利用して逆投影法による画像再構成を行う場合、冗長性に伴う再構成画像のフーリエ成分の過大評価すなわち冗長度を補正する必要がある。冗長度を見積もるには、オルロフ (Orlov) 球 (図5)<sup>13,16-18)</sup> を使うと便利である。測定投影データの投影面の法線ベクトルすなわち投影方向の単位ベクトルを原点から引き、それらの終端を原点中心の単位球すなわちオルロフ球面上にプロットした測定方向領域  $\Omega$  を考える。例えば、三次元 PET で得られる投影データの測定方向領域  $\Omega$  は、オルロフ球面の赤道を挟む帯状の領域となる (図5の影の部分)。また、三次元画像再構成が可能な必要最小限の投影データ ( $\Psi_0 \rightarrow 0, \alpha = 0 \sim \pi$ ) に対する  $\Omega$  は、オルロフ球の半大円となる。ここで、オルロフ球の大円の意味につ

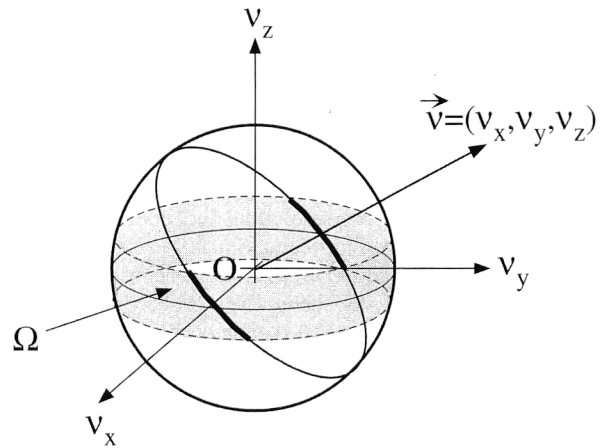


図5 オルロフ球による冗長度の計算。

いて説明しておく。投影断面定理より、 $f(x, y, z)$  のあるフーリエ成分  $F(v_x, v_y, v_z)$  は、空間周波数ベクトル  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  を含む平面の法線ベクトルと同じ投影方向の投影データから得ることができる。1つの空間周波数ベクトル  $\vec{v}$  を含む平面は無数にあり、それらに対応する投影データの方向領域は、オルロフ球面上において、 $\vec{v}$  方向の単位ベクトルに垂直な1つの大円となる。すなわち、測定方向領域  $\Omega$  とこの大円との交線 (図5における太線部分) は、フーリエ成分  $F(v_x, v_y, v_z)$  に寄与する投影データの測定方向の集合を与える。したがって、この交線の長さが長いほど、多くの方向の測定投影データが1つのフーリエ成分  $F(v_x, v_y, v_z)$  を決定するのに寄与している、すなわち、冗長度が大きいということになる。 $F(v_x, v_y, v_z)$  の冗長度が  $v_x$ - $v_y$ - $v_z$  空間全体にわたって一様でなければ、これを打ち消す三次元の補正フィルターを掛ける必要がある。

本稿では、解析的画像再構成理論の核心部分にのみ焦点を絞り概説した。解析的手法と並んで重要な代数的手法<sup>10,16)</sup> については触れていない。平行ビーム投影以外の投影方式 (扇形<sup>11)</sup> や錐形ビーム投影<sup>13,14)</sup> については、紙数制限の関係で割愛した。多層 CT に対する螺旋走査<sup>11,14,19)</sup> の話題についても同様である。詳しくは、文献を参照されたい。

### 文 献

- 1) R. H. T. Bates and M. J. McDonnell: *Image Restoration and Reconstruction* (Oxford Science Publications, New York, 1986).
- 2) 斎藤恒雄: 画像処理アルゴリズム (近代科学社, 1993).
- 3) 河田 聡, 南 茂夫: 科学計測のための画像データ処理 (CQ 出版, 1994).
- 4) F. Tsumuraya: "Deconvolution based on the Wiener-Lucy chain algorithm: An approach to recover local information

- losses in the deconvolution procedure,” J. Opt. Soc. Am. A, **13** (1996) 1532-1536.
- 5) L. A. Shepp and Y. Vardi: “Maximum likelihood reconstruction for emission tomography,” IEEE Trans. Med. Imag., **MI-1** (1982) 113-122.
  - 6) L. B. Lucy: “An iterative technique for rectification of observed distribution,” Astron. J., **79** (1974) 745-754.
  - 7) J.-A. Conchello: “Superresolution and convergence properties of the expectation-maximization algorithm for maximum-likelihood deconvolution of incoherent images,” J. Opt. Soc. Am. A, **15** (1998) 2609-2619.
  - 8) P. Magain, F. Courbin and S. Sohy: “Deconvolution with correct sampling,” Astrophys. J., **494** (1998) 472-477.
  - 9) D. Kundur and D. Hatzinakos: “Blind image deconvolution,” IEEE Signal Proc. Mag., **13**, No.3 (1996) 43-64.
  - 10) A. C. Kak and M. Slaney: *Principles of Computerized Tomographic Imaging* (IEEE Press, New York, 1988).
  - 11) 岡部哲夫, 瓜谷富三編: 医用画像工学, 医用放射線科学講座 14 (医歯薬出版, 1997).
  - 12) 井上多門: “工学と数学的論理—画像再構成問題に見る数学的論理の実用性—”, 応用物理, **70** (2001) 962-968.
  - 13) 田中栄一: “解析的3次元再構成”, Med. Imaging Technol., **18** (2000) 33-39.
  - 14) 工藤博幸: “X線を用いた3次元断層像再構成技術”, 光学, **29** (2000) 354-359.
  - 15) 沈 雲: “マルチスライスCTの再構成アルゴリズム”, Med. Imaging Technol., **19** (2001) 3-10.
  - 16) 村山秀雄: “陽電子の科学と計測シリーズ VIII. ポジトロン・エミッション・トモグラフィ 3. 画像の再構成とデータ補正”, Radioisotopes, **42** (1993) 244-254.
  - 17) 村山秀雄: “立体計測型ポジトロン断層撮像法における画像再構成”, 光学, **29** (2000) 366-371.
  - 18) 村山秀雄, 野原功全: “3次元像再構成におけるOrlovの式の分析とその拡張”, Med. Imag. Technol., **12** (1994) 84-93.
  - 19) 田口克行: “ヘリカルCTにおける画像再構成”, Med. Imag. Technol., **19** (2001) 436-443.

(2002年3月4日受理)