

## 位相回復に用いるフーリエ反復法の改善

高橋 徹\*・高城 洋明\*\*・伊藤 克彦\*\*・藤崎 敏朗\*\*

\*大分工業高等専門学校電気電子工学科 (〒870-0152 大分市牧 1666)

\*\*九州工業大学工学部電子工学教室 (〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1)

### An Improvement of the Iterative Fourier-Transform Method for Phase Retrieval

Tohru TAKAHASHI\*, Hiroaki TAKAJO\*\*, Katsuhiko ITOH\*\* and Toshiro FUJISAKI\*\*

\*Department of Electrical and Electronic Engineering, Oita National College of Technology, 1666 Maki, Oita 870-0152

\*\*Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, 1-1 Sensuicho, Tobata, Kitakyushu 804-8550

The iterative Fourier-transform algorithm proposed by Fienup is a method which reconstructs an object from its Fourier modulus or equivalently reconstructs the Fourier phase of the object. In general, the iterative Fourier-transform algorithm is composed of the hybrid input-output algorithm (HIO) and the error reduction algorithm (ER). As is well-known, this composed algorithm, called HIO/ER, sometimes falls into a stagnation state. The HIO alone algorithm in which the feedback parameter is set to be a small value has a capability to converge to the solution. However, in the case in which the Fourier modulus is contaminated by noise, there is no algorithm which converges to the ideal estimate. We propose a method which is composed of the HIO and the converging part of the HIO, named HIO/CPHIO. It is shown that the HIO/CPHIO converges to an adequate estimate without suffering from the stagnation problem even in the contaminated case.

**Key words:** iterative Fourier-transform algorithm, phase retrieval, image recovery, inverse problem

#### 1. はじめに

本論文で述べる位相回復とは、回復すべき物体のフーリエ変換の振幅情報と物体に関するいくつかの先験的情報とから物体のフーリエ変換の位相情報を、したがって物体そのものを、回復することである。この位相回復に用いられる主要な方法に Fienup によって提案されたフーリエ反復法がある<sup>1)</sup>。このフーリエ反復法はフーリエ領域における拘束条件と物体領域における拘束条件との両方を満足させるようにフーリエ変換とフーリエ逆変換を繰り返し適用して物体そのものを回復する方法であり、天体像の回復<sup>2)</sup>、波面の回復<sup>3)</sup>、超解像<sup>4)</sup>などのさまざまな分野に応用されている。

このフーリエ反復位相回復法では、hybrid input-output アルゴリズム (HIO) と error reduction アルゴリズム (ER) とが組み合わされて用いられることが多い。すなわ

ち HIO を 50~100 回繰り返した後 ER を 5~20 回繰り返すという処理を 1 サイクルとして、このサイクルを 10 数サイクル~数十サイクル繰り返すという方法であり HIO/ER と記される。HIO/ER は、ある程度回復された物体をその初期物体として使用することができる場合には、有効な位相回復法として機能する<sup>5)</sup>。しかしながら、一般には初期物体に乱数値物体しか利用できず、測定されたフーリエ振幅にノイズ成分が含まれていない場合においてさえも、解以外の物体に収束して停滞してしまうという問題点を有している<sup>6-8)</sup>。

この停滞問題は、HIO と組み合わせて用いられる ER の機能に原因のあることが示された<sup>9)</sup>。さらに、この停滞問題を克服して解を得るにはフィードバック定数を 1 に比べて十分小さくした HIO を単独で用いればよいことが示された<sup>10,11)</sup>。この方法によって解が得られるのは、HIO

E-mail: tohru@oita-ct.ac.jp

が「エラーが極小となる物体に収束しその収束物体が解でない場合には脱出して最終的には解に到達する」という挙動特性を有しているからである。

ところがフーリエ振幅にノイズが含まれる場合には、フィードバック定数を1に比べて十分小さくしてHIOを単独で用いるという方法によっても、フィードバック定数が有限な値であるために、HIOは「エラーが極小となる物体に収束し、その収束物体が解でない場合には脱出して最終的には解に到達する」という挙動を完全には示すことができず、したがってこの挙動が達成された場合に推定されるはずの物体(理想推定物体とよぶ)から外れた物体を推定してしまうという問題が生じてしまう。

そこで筆者らは、「ERの欠点を有することなくエラーが極小となる物体に収束する」という挙動と「収束した物体が解でない場合には、それまでの繰り返しにおける情報を失うことなく、その物体から脱出する」という挙動とにわけて、おのおのの挙動を交互に確実に実現するアルゴリズムを構築した<sup>12)</sup>。この方法は、フーリエ振幅にノイズが含まれる場合にも有効に機能するが、収束速度が非常に遅くなるという問題点を有している。

本論文は、フィードバック定数を1に比べて十分小さくしたHIOを単独で用いた場合と同様に、停滞問題を生じることなく解を得ることができ、フーリエ振幅にノイズが含まれている場合にも停滞問題を生じることなく理想推定物体に近い物体の回復を収束速度が減じられることなく達成できるアルゴリズムの構築を目的としている。本論文では、この目的に沿うアルゴリズムを提案しフーリエ反復法の改善を図る。

まず第2章において、フーリエ反復法の概観と提案法構築のための準備を行う。次に第3章において従来の方法を改善するアルゴリズムを構築し、その有効性を検討する。最後に第4章でまとめを行う。

## 2. フーリエ反復法

いま、回復すべき原物体を $f(x, y)$ 、そのフーリエ変換を $F(u, v)$ とする。(以後の表記において小文字は物体を、大文字はそのフーリエ変換を表すものとする。)位相回復とは、測定された物体のフーリエ振幅 $|F(u, v)|$ と物体に対する先験的知識とから原物体のフーリエ位相 $\phi(u, v)$ を、したがって原物体 $f(x, y)$ を回復することをいう。

本論文ではフーリエ振幅 $|F(u, v)|$ は $M \times N$ のサンプリング点上で測定されたものとする。したがって推定されるべき原物体 $f(x, y)$ と $F(u, v)$ との関係は、

$$F(u, v) = |F(u, v)| \exp\{i\phi(u, v)\}$$

$$= \sum_{x=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{y=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f(x, y) \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi}{M}ux + \frac{2\pi}{N}vy\right)\right\} \quad (1)$$

とDFT(discrete Fourier transform)を用いて表される。本論文では原物体 $f(x, y)$ は非負の実数値物体(非負条件)であり、あらかじめわかっている範囲の外では原物体の値はゼロである(サポート条件)ものとする。したがって物体に対する先験的知識として物体の非負性とサポートを用いることができる。

フーリエ反復法の最も基礎となるアルゴリズムはERである。繰り返し回数 $m$ 回目の入力物体を $g_m(x, y)$ と置く。入力物体のフーリエ変換 $G_m(u, v)$ の位相 $\theta_m(u, v)$ は保持し、振幅 $|G_m(u, v)|$ を測定によって得られている原物体のフーリエ振幅 $|F(u, v)|$ に置き換えて $G'_m(u, v)$ を形成する。すなわち

$$G'_m(u, v) = |F(u, v)| \exp\{i\theta_m(u, v)\} \quad (2)$$

この $G'_m(u, v)$ を逆フーリエ変換することによって出力物体 $g'_m(x, y)$ が得られる。したがって出力物体はフーリエ領域の拘束条件を満たした物体である。この出力物体に対して物体領域の拘束条件を適用することによって $m+1$ 回目の入力物体 $g_{m+1}(x, y)$ が得られる。すなわち

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (3)$$

ここで $D$ は出力物体の値が物体領域の拘束条件を満足しているサンプル点の集合である。したがって入力物体は物体領域の拘束条件を満たした物体である。この一連の処理が、最初に定められた繰り返し回数だけ行われるか、エラー関数がある値以下となるまで繰り返される。初期入力物体 $g_0(x, y)$ としては、ある程度の回復度を有する物体が得られている場合にはその物体を初期入力物体に用い、そのような物体が得られていない場合にはサポート内に乱数値が分布する物体を初期入力物体に用いる。

HIOは収束速度を高速化するために導入されたアルゴリズムであり<sup>1)</sup>、 $m+1$ 回目の入力物体をERにおける式(3)とは異なって、

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \in D \\ g_m(x, y) - \beta g'_m(x, y) & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (4)$$

として形成する。ここで $\beta$ は正の値をとるフィードバック定数である。したがって、ERにおいては入力物体が物体領域の拘束条件を満足しているので入力物体をそのまま推定物体として用いることができるが、HIOにおいては入力物体は物体領域の拘束条件を満足しておらず出力物体のフーリエ位相を制御する関数であるので、出力物体に対してERと同じ、式(3)の処理を施した物体が推定物体と

なる。

各繰り返しにおける収束の程度を評価するエラー関数として、フーリエエラー $\varepsilon_{fm}^2$ とオブジェクトエラー $\varepsilon_{om}^2$ が用いられる。すなわち繰り返し回数  $m$  回目のエラーをおの

$$\varepsilon_{fm}^2 = \frac{1}{MN} \sum_{u,v} \{|G_m(u,v)| - |F(u,v)|\}^2, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{om}^2 = \sum_{(x,y) \in D} |g'_m(x,y)|^2 \quad (6)$$

と定める。アルゴリズムが収束して入力物体が繰り返しごとに変化しなくなるとエラーは一定値となる。フーリエ振幅にノイズ成分が含まれない場合には、ER においては解に収束するとエラーはゼロになり、HIO においてはオブジェクトエラーはゼロとなるがフーリエエラーは入力物体が式(4)で表されるのでゼロとはならず一定値となる。したがって HIO において回復度を評価するにはオブジェクトエラーを用いるか、または出力物体に対して式(3)を施して得られる推定物体のフーリエエラーを用いるかしなければならない。

フーリエ反復法の使用にあたっては HIO と ER が組み合わされて用いられることが多い。この場合 HIO と ER とが交互に数十回ずつ繰り返される。HIO における  $\beta$  の値は 0.5~1.0 の値が用いられる。収束速度の向上が見込まれる HIO が単独で用いられず、ER と組み合わせられて用いられるのは ER がエラーの単調減少性：

$$\varepsilon_{om}^2 \geq \varepsilon_{fm+1}^2 \geq \varepsilon_{om+1}^2 \quad (7)$$

を有しているからである<sup>1)</sup>。しかしながら ER における処理において式(3)からわかるように、物体領域の拘束条件を満足していないサンプル点における入力物体の値を強制的にゼロとするために、HIO/ER は周期的停滞状態に陥りやすいという欠点を生じることとなり<sup>9)</sup>、適度に回復された物体を初期物体として用いることができない場合には、HIO/ER の解への収束に対する信頼性が低下するという問題点がある。例えば Fig. 1 に示した原物体をそのフーリエ振幅から HIO/ER を用いて回復しようとした場合、乱数値分布を有する 100 通りの初期物体に対して 8 例が解以外の物体に収束して停滞した。この際のサポートは原物体に接する矩形サポートを用いた。また HIO の  $\beta$  は 0.7 とし、HIO を 80 回繰り返した後に ER を 20 回繰り返すサイクルを 1 サイクルとして 100 サイクル繰り返した。Fig. 2 は解以外の物体に停滞した場合の繰り返し回数に対するオブジェクトエラーの変化である。ただし、オブジェクトエラーを出力物体のエネルギーで規格化した値の平方根：

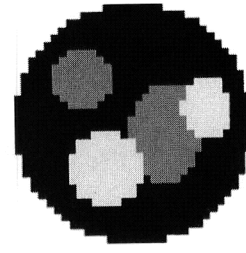


Fig. 1 Original object.

$$E_{om} = \left[ \sum_{x,y} \frac{\varepsilon_{om}^2}{|g'_m(x,y)|^2} \right]^{1/2} \quad (8)$$

をエラーとして示している。このように HIO/ER は解とは異なる物体に収束して停滞するという問題点を有している。

HIO は当初収束速度を向上させるために導入されたが、そのフィードバック定数  $\beta$  が 1 に比べて十分小さい場合には、出力停滞物体への収束能力と、その収束物体が解でない場合にその物体から脱出する能力とをあわせもつアルゴリズムであることが明らかとなった<sup>9-11)</sup>。出力停滞物体とは、HIO の出力停滞状態（繰り返しごとに入力物体の値は変化するが、出力物体の値は変化しない状態）における出力物体である。出力停滞物体は、オブジェクトエラーが極小値となる物体であり、解もそのひとつである。すなわち HIO においては、繰り返し回数  $m+1$  回目の入力物体  $g_{m+1}(x,y)$  のフーリエ変換（すなわち式(4)のフーリエ変換）は

$$G_{m+1}(u,v) = G_m(u,v) + \text{DFT} \left\{ \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_f^2}{\partial g(x,y)} \Big|_{g=g_m} \right]^D \right\} \\ - i\beta \frac{MN}{4|F(u,v)|^2} \left[ \frac{\partial \varepsilon_o^2}{\partial \theta(u,v)} \Big|_{G'=G'_m} \right] G'_m(u,v) \\ - \beta \frac{MN}{4|F(u,v)|} \left[ \frac{\partial \varepsilon_o^2}{\partial |G'(u,v)|} \Big|_{G'=G'_m} \right] G'_m(u,v) \quad (9)$$

と表すことができる<sup>11)</sup>。ここで  $[ \bullet ]^D$  は物体  $\bullet$  に対して物体領域の拘束条件を適用して得られる物体を表している。右辺第 2 項と第 3 項が出力停滞物体への収束機能を表し、右辺第 4 項がその出力停滞物体が解でない場合にその物体から脱出する機能を表している。さらに HIO は物体領域の拘束条件を満足していないサンプル点での出力物体の値を入力物体に蓄積する機能があるため周期的停滞状態に陥りにくいという長所を有している<sup>9)</sup>。Fig. 1 に示した原物体をそのフーリエ振幅から回復するために、HIO/ER と同様の 100 通りの初期物体に対して  $\beta$  を 0.1 とし HIO を単独で用いた場合、すべての場合に解を得ることができた。さきほどの Fig. 2 に HIO を単独で用いた場合の繰り返し回数に対するエラー  $E_{om}$  の変化の例を示している。繰り返し回数とともに解に収束していることがわかる。

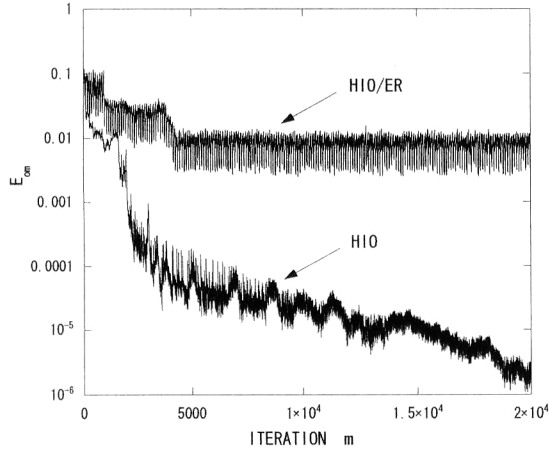


Fig. 2 Normalized object error  $E_{om}$  vs. the number of iterations  $m$  obtained by the HIO/ER and the HIO. One cycle of the HIO/ER was composed of 80 iterations of the HIO with  $\beta=0.7$  and 20 iterations of the ER. The value of  $\beta$  in HIO alone algorithm was set to be 0.1.

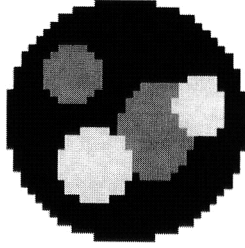


Fig. 3 The ideal estimate in the case in which noise rate  $N_R=1\%$ .

フーリエ振幅にノイズが含まれる場合、対応する解は一般には存在しない。このような場合、原物体を得ることは不可能である。そこで、原物体を初期物体として、ERを実行した場合に得られる収束物体を理想推定物体とよぶことにすると、エラーが極小となる物体の中で理想推定物体のエラーが最小値となると考えられるので、この場合には理想推定物体がアルゴリズムの回復すべき物体であるとみなすことができる。ところが $\beta$ を小さな値にしたHIOを単独で用いる方法では、 $\beta$ の値が小さくても有限の値であるために、ノイズの含まれない場合の原物体と異なり理想推定物体のエラーはゼロとはならないことから、HIOの出力停滞物体から脱出する機能が働いて、理想推定物体に収束する前に理想推定物体から脱出してしまい、理想推定物体を得ることができないという問題が生じる。Fig. 3にノイズ成分の割合 $N_R$ が1%のときの理想推定物体を示し、Fig. 4に100通りの初期物体に対して、 $\beta$ を0.1としてHIOによる回復を行った場合における平均的な回復度の推定物体の例を示す。ここでノイズの割合 $N_R$ は、

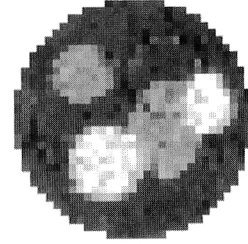


Fig. 4 Reconstructed object obtained by the HIO alone in the case in which  $N_R=1\%$ .

$$N_R = \left[ \frac{\sum_{u,v} \{|F_n(u,v)| - |F(u,v)|\}^2}{\sum_{u,v} |F(u,v)|^2} \right]^{1/2} \times 100(\%) \quad (10)$$

と定義する。 $|F_n(u,v)|$ はノイズを含んだフーリエ振幅であり、原物体のフーリエ振幅 $|F(u,v)|$ にガウシアン分布のノイズ $n(u,v)$ を加えて正值化した値；

$$|F_n(u,v)| = ||F(u,v)| + n(u,v)| \quad (11)$$

を用いている。HIOによってある程度の回復度は得られているものの、理想推定物体には遠いことがわかる。よりよい回復度を得る方法のひとつとして $\beta$ の値を非常に小さな値にしてHIOを実行する方法もあるが、これは同時に収束速度を低下させてしまうという問題を生じることもある。

### 3. フーリエ反復法の改善

フーリエ振幅にノイズが含まれる場合にも理想推定物体に近い物体をあまりに多くの繰り返し回数を費やさずに得る方法を構築する。

HIOにおいて、式(9)における第4項は出力停滞物体からの脱出項である<sup>11)</sup>。したがって $\beta$ の値が有限であるために出力停滞物体に完全に収束できないのは、この第4項が原因である。そこでこの第4項を消去したアルゴリズムを考えると、このアルゴリズムは出力停滞物体への収束能力を有し $\beta$ の値をあまり小さくする必要はない。このアルゴリズムをCPHIO (converging part of HIO) とよぶ。すなわちCPHIOにおける $m+1$ 回目の入力物体は式(9)の第4項を消去して逆フーリエ変換して得られる物体である。ここで、

$$\frac{\partial \epsilon_0^2}{\partial \theta(u,v)} \Big|_{G=G_m} = \frac{4}{MN} \text{Im}[\{G'_m(u,v)\}^* G_m'^{ND}(u,v)] \quad (12)$$

であるので<sup>10,11)</sup>、CPHIOにおける $m+1$ 回目の入力物体は、

$$g_{m+1}(x,y) = \begin{cases} g'_m(x,y) & (x,y) \in D \\ g_m(x,y) & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$-\beta \times \text{IFT} \left\{ i \frac{1}{|F(u, v)|^2} \text{Im}[\{G_m(u, v)\}^* G_m^{\text{ND}}(u, v)] G_m(u, v) \right\} \quad (13)$$

として求められる。ここで、 $G_m^{\text{ND}}(u, v)$  は  $m$  回目の出力物体  $g'_m(x, y)$  において物体領域の拘束条件を満足しているサンプル点での値を強制的にゼロにした物体のフーリエ変換を表している。また、\*は複素共役を、IFTは逆フーリエ変換を表している。このCPHIOは出力停滞物体への収束能力を有していると同時に、出力物体において物体領域の拘束条件を満足していないサンプル点の値を入力物体に蓄積する能力も有している。

しかしながらCPHIOは出力停滞物体からの脱出能力は有していない。そこでHIOをCPHIOと組み合わせて用いることにする。すなわちHIOとCPHIOを数十回ずつ繰り返すサイクルを1サイクルとしてアルゴリズムを構成する。これをHIO/CPHIOとよぶ。CPHIOが出力停滞物体への収束能力を有しているので、 $\beta$ の値を小さな値にする必要はなく、0.5~1.0の値を用いることができる。またCPHIOは出力物体における物体領域の拘束条件を満足していないサンプル点の値を入力物体に蓄積する能力を有しているので、HIO/ERと異なり周期的停滞状態に陥る危険性はきわめて小さい。

Fig. 5にフーリエ振幅に含まれるノイズの割合  $N_R$  が1%の場合に、100通りの初期物体に対して、 $\beta$ の値を0.1とした場合のHIOによる回復、および $\beta$ の値を0.7とした場合のHIO/CPHIOによる回復を行って推定物体のエラーが最小となったときの繰り返し回数と、エラーとの関係を示す。ただし推定物体は出力物体において物体領域の拘束条件を満足しないサンプル点の値を強制的にゼロにした物体であり、そのフーリエエラーを出力物体のエネルギーで規格化した値の平方根：

$$E_F = \left[ \frac{\sum_{u,v} \{|G^{\text{D}}(u, v)| - |F(u, v)|\}^2}{\sum_{u,v} |F(u, v)|^2} \right]^{1/2} \quad (14)$$

をエラーとして表している。HIO/CPHIOにおける $\beta$ の値はHIOとCPHIOともに0.7とし、おおよそ50回の繰り返しを行って1サイクルとした。最大の繰り返し回数を1000回、2000回、5000回として、HIOを実行した場合を(a)に、HIO/CPHIOを実行した場合を(b)に示している。(c)では最大の繰り返し回数を $10^4$ 回とした場合のHIOとHIO/CPHIOとの違いを示している。○がHIO、●がHIO/CPHIOである。また理想推定物体のエラーを実線で示している。これらの図からHIO/CPHIOではHIOを単独で用いた場合に比べて $\beta$ の値が大きいに

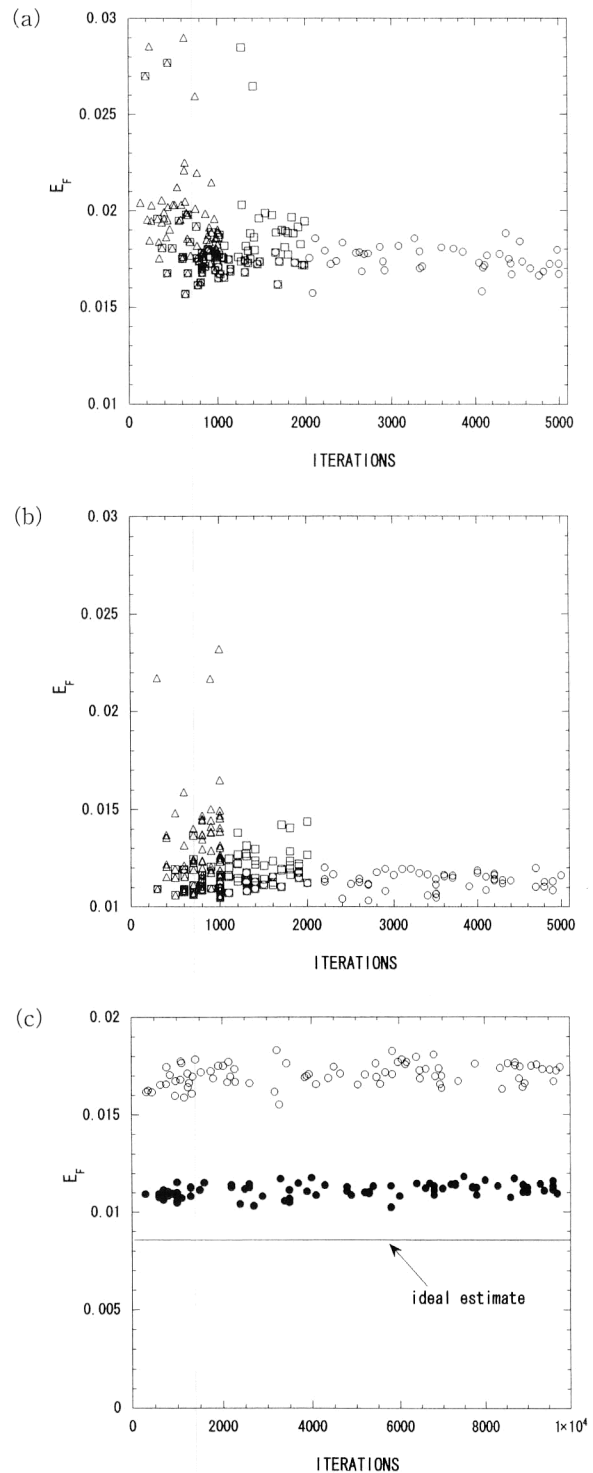


Fig. 5 The value of error  $E_F$  and the iteration number when the  $E_F$  was minimum value in a certain iterations set to  $10^3 \sim 10^4$  beforehand. In each case, 100 initial objects were employed. In (a) and (b),  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\circ$  denote the case in which the iterations were set to 1000, 2000 and 5000 respectively. (a) denotes the value obtained by the HIO with  $\beta = 0.1$ . (b) denotes the value obtained by the HIO/CPHIO whose one cycle was composed of 50 iterations of the HIO with  $\beta = 0.7$  and 50 iterations of the CPHIO with  $\beta = 0.7$ . (c) denotes the value obtained by the HIO ( $\circ$ ) and the value obtained by the HIO/CPHIO ( $\bullet$ ) in  $10^4$  iterations.

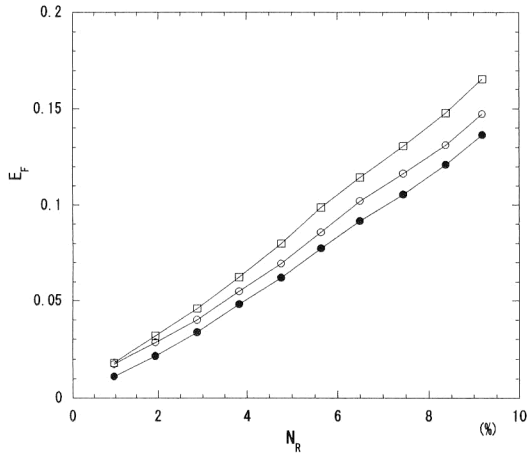


Fig. 6  $E_F$  of the estimated object vs. noise rate  $N_R$ . ●, ○, and □ denote values obtained by the HIO/CPHIO with  $\beta=0.7$ , values obtained by the HIO alone with  $\beta=0.1$ , and values obtained by the HIO alone with  $\beta=0.7$  respectively.

もかわらず、 $E_F$  のばらつきが小さいこと、平均的に理想推定物体に近い値が得られており、推定が理想推定物体から大きく外れることのないことがわかる。また、繰り返し回数を増やすほど、初期物体の違いによる回復度の違いを生じることがなくなり、安定した回復度を得られ、この例では2000回以上の繰り返しを実行することによってHIO/CPHIOによる推定が、HIOを単独で用いた推定よりも常によい推定となっていること、数千回の繰り返しを超えるとそれ以上繰り返し回数を増やしても回復度の向上は望めず定常状態となることがわかる。このことは、(実際にどの程度の繰り返し回数を必要とするかは原物体の複雑度等に依存すると思われるが、)数十サイクル程度の一定の繰り返し回数を実行することによって、HIO/CPHIOによって得ることのできる最良の回復度がほぼ保証されることを示していると考えられる。しかしこのことは同時にHIO/CPHIOによっても理想推定物体を得ることができないことも示している。これには主に2つの原因が考えられる。すなわち、HIOの $\beta$ の値が大きいためCPHIOの1サイクル中における繰り返し回数が少ないために、1サイクル内で完全に出力停滞物体に収束しきれない可能性があること、理想推定物体のオブジェクトエラーと同程度のエラーとなる出力停滞物体が複数存在するために理想推定物体に収束し得ない可能性があること、の2つである。前者の原因は $\beta$ の値を小さくして1サイクルの回数を増やすことによってある程度克服されるものの、回復に必要な繰り返し回数も増加してしまうという欠点を有している。しかしながらこのような対策によっても理想推定物体を得るには至らなかった。したがって後者の原因がHIO/

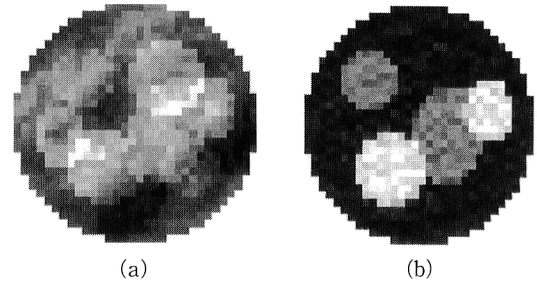


Fig. 7 Reconstructed objects in the case in which  $N_R=1\%$ . (a) Reconstructed object by the HIO/ER. (b) Reconstructed object by the HIO/CPHIO. Each object is the worst example estimated from 100 initial objects respectively.

CPHIOによっても理想推定物体を得られない主たる原因と考えられるが、詳細は不明であり今後の検討が必要である。

Fig. 6にノイズの割合と推定物体のエラーとの関係を示す。エラーは5通りの入力物体に対して回復を行った場合の推定物体のエラーの平均値である。HIO/CPHIOは安定してよい回復度を得ていることがわかる。

HIO/CPHIOはHIO/ERのER部分をCPHIOに変更したアルゴリズムとみなすこともできる。この変更により収束速度を大きく損なうことなく回復度が改善され信頼性が向上した。Fig. 7にフーリエ振幅に含まれるノイズの割合 $N_R$ が1%のときに、100通りの初期物体に対してHIO/ERで回復を行った場合、およびHIO/CPHIOで回復を行った場合に、おのおのについて最もエラーが大きかった推定物体、すなわち回復度の最も悪かった推定物体を示す。HIO/ERの推定物体は理想推定物体から大きく異なった物体となっているが、HIO/CPHIOでは理想推定物体に近い物体が推定できており、HIO/CPHIOの信頼性の高いことがわかる。

#### 4. ま と め

物体のフーリエ振幅が測定によって得られているときに物体のフーリエ位相を、したがって物体そのものを回復する方法であるフーリエ反復法の改善法を提案した。すなわちHIOにおいて出力停滞物体への収束能力を有する部分のみを残して出力停滞物体から脱出する部分を取り去ったアルゴリズム(CPHIO)を、HIOと組み合わせて用いる方法を構築した。この方法(HIO/CPHIO)は、一般によく用いられているHIO/ERが被りやすい停滞問題に陥る危険性が小さくHIO/ERよりも信頼性が高い。またHIOを単独で用いる方法と比べてもHIOのフィードバック定数をあまり小さな値にする必要がないので、本方法は収束

速度の低下を招くことなく理想推定物体に近い物体を得る方法であるということが出来る。

今後は本方法の有効性をさまざまな応用分野において検討していかなければならない。

## 文 献

- 1) J. R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: A comparison," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 2758-2769.
- 2) J. C. Dainty and J. R. Fienup: "Phase retrieval and image reconstruction for astronomy," *Image Recovery: Theory and Application*, ed. H. Stark (Academic Press, Florida, 1987) pp. 231-275.
- 3) J. N. Cederquist, J. R. Fienup, C. C. Wackerman, S. R. Robinson and D. Kryskowski: "Wave-front phase estimation from Fourier intensity measurements," *J. Opt. Soc. Am. A*, **6** (1989) 1020-1026.
- 4) D. K. Saldin, R. J. Harder, V. L. Shneerson and W. Moritz: "Phase retrieval methods for surface x-ray diffraction," *J. Phys. Condens. Matter*, **13** (2001) 10689-10707.
- 5) P. Negrete-Regagnon: "Practical aspects of image recovery by means of the bispectrum," *J. Opt. Soc. Am. A*, **13** (1996) 1557-1576.
- 6) 高橋 徹, 高城洋明, 待鳥誠範, 永野直広: "繰返し型相回復アルゴリズムにおける停滞問題の数値シミュレーションによる考察", *光学*, **21** (1992) 119-127.
- 7) H. Takajo, T. Takahashi, H. Kawanami and R. Ueda: "Numerical investigation of the iterative phase-retrieval stagnation problem: territories of convergence objects and holes in their boundaries," *J. Opt. Soc. Am. A*, **14** (1997) 3175-3187.
- 8) J. H. Seldin and J. R. Fienup: "Numerical investigation of the uniqueness of phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **7** (1990) 412-427.
- 9) H. Takajo, T. Takahashi and T. Shizuma: "Further study on the convergence property of the hybrid input-output algorithm used for phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **16** (1999) 2163-2168.
- 10) 高城洋明, 高橋 徹: "位相回復におけるハイブリッドインプットアウトプット・アルゴリズムの能力について", *光学*, **22** (1993) 419-427.
- 11) H. Takajo, T. Takahashi, R. Ueda and M. Taninaka: "Study on the convergence property of the hybrid input-output algorithm used for phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **15** (1998) 2849-2861.
- 12) H. Takajo, T. Shizuma, T. Takahashi and S. Takahata: "Reconstruction of an object from its noisy Fourier modulus: Ideal estimate of the object to be reconstructed and a method that attempts to find that estimate," *Appl. Opt.*, **38** (1999) 5568-5576.