■光学工房

光波の複素表示を直観的に理解しよう

～こんな教え方はいかがでしょう?～

光学の学習をはじめて最初にまごつくのは，光波の複素表示ではないでしょうか．複素表示をすることで，光波を表す電界の計算が容易になるということは理解できても，複素表示の虚数部分が何を表しているのかがよくわからず，釈然としないという方も多いと思います．かくいう筆者も，工業高等専門学校で教鞭を執っておりますが，複素表示を学生に理解させるのに毎年苦労しています．

物理現象の理解を助けるための手法のひとつに，モデル化があります．モデル化することで，理解しにくい物理現象の本質を浮き立たせ，頭でイメージしやすい形での直観的な理解が可能になるからです．そこで今回の光学工房では，光波の複素表示はこのようにも考えることができる，ということで，光波の複素表示をモデル化したひとつの例を紹介します．

まずはじめに，光波の複素表示を簡単におさらいしておきましょう．図1は r 方向に伝搬している一次元平面波を表しています．位置 r，時刻 t における電界 $E(r,t)$ は，

$$E(r,t)=A_0\cos(kr-\omega t-\varphi) \qquad (1)$$

と表されます．ここで，A_0 は振幅，k は波数，ω は

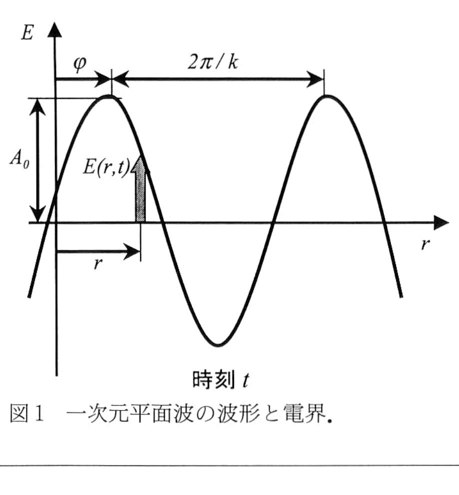

図1　一次元平面波の波形と電界．

角周波数，ϕ は初期位相です．

オイラーの公式を用いることで，式 (1) は，

$$E(r,t)=A_0\mathrm{Re}[\exp \mathrm{j}(kr-\omega t-\varphi)] \qquad (2)$$

と書き改めることができます．ここで，j は虚数単位であり，Re[　] は実部のみを取り出すという意味です．とくに混乱がなければ Re[　] を省略して書けるので，最終的に式 (1) は，

$$E(r,t)=A_0\exp(-\mathrm{j}\varphi)\exp(\mathrm{j}kr)\exp(-\mathrm{j}\omega t) \qquad (3)$$

と書けることになります．式(3)において，$A_0\exp(-\mathrm{j}\varphi)$ が複素振幅成分，$\exp(\mathrm{j}kr)$ が空間成分，$\exp(-\mathrm{j}\omega t)$ が時間成分となります．複素表示することで，このように成分が分離できて好都合なわけです．さらに，電界 $E(r,t)$ を計算する際には，複素表示で計算して実部をとればよいということを，光学の一般的な教科書に必ず記してあることは，読者の皆さんならすでにご存知だと思います．

さて，複素表示することで，空間成分と時間成分が分離できることと，電界を計算する際には，複素表示で計算して実部をとればよいことはわかりました．では，複素表示したときの虚部はどこへ行ったのでしょうか．線形演算のみを考えるならば，物理的には意味のない量ですが，あっさり無視してしまうというのは，ちょっと気になります．

そこで，複素表示の虚数部分も考えてみることにしましょう．式 (2) をもう一度みてください．式 (2) は $A_0\exp \mathrm{j}(kr-\omega t-\varphi)$ の実数部分だけを取り出しているわけですが，虚数部分も無視せず書き表したとすれば，

$$A_0\exp \mathrm{j}(kr-\omega t-\varphi)=A_0\cos(kr-\omega t-\varphi)$$
$$\mathrm{j}A_0\sin(kr-\omega t-\varphi) \qquad (4)$$

と書けます．実数部分は余弦関数，虚数部分は正弦関数なので，位相差はちょうど4分の1波長分であることがわかります．式（4）の実数部分と虚数部分を，同時に図示できないものでしょうか．図示することができれば，複素表示を直観的に理解しやすくなるかもしれません．そのように考えて，式（4）の実数部分と虚数部分の関係を図示したものが，図2になります．図2は，複素平面を光波の進行方向である r 方向にも拡張して描いた複素空間だと理解してください．

図2の中央に描いてあるコイルばねのような曲線が，モデル化した式（4）の曲線，すなわち虚数部分も含めて複素表示した場合の一次元平面波を表しています．これはコイルばねではなく，ねじをイメージしていただいても結構です．この曲線の実数部分だけを取り出せば余弦曲線で表され，虚数部分だけを取り出せば正弦曲線で表されます．このことは図2のように，コイルばねの影を実軸と r 軸とを含む平面に投影したとき，余弦曲線にみえ，虚軸と r 軸とを含む平面に投影したとき，正弦曲線にみえることに対応しています．

このようにして考えると，複素表示で電界を表すことの意味が，わかっていただけると思います．つまり，電界はいつも複素空間内に，ちょうどコイルばねのような曲線として存在しているのです．ところが，われわれはいわば実空間に投影されている影しかみることができないので，波形を余弦曲線として表すことになる，と考えればよいのです．干渉光などの光波を表す電界を計算する際に，通常は複素表示で計算した後，実数部分だけを取り出します．このことは，いったん複素空間において，それぞれの光波を表す曲線を合成した曲線を求めた後，その曲線を実空間に投影した影を求めていることに対応しているわけです．

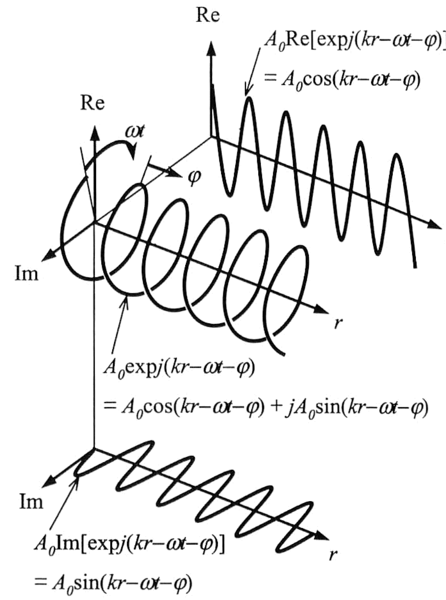

図2　複素表示における実数部と虚数部の関係．

ところで，図2を用いると，式（1）の位相項に含まれている ωt と φ の本質的な違いが，より明確に区別できます．実空間上において，ωt の位相が変化したときの波形と，φ の位相が変化したときの波形を考えてください．両者の位相変化が同じ値のとき，それぞれの場合に実空間上で得られる波形は，みかけ上同じ波形になります．

ここで，もう一度，図2のコイルばねをみてください．ωt の位相変化は，r 軸を中心として曲線を回転させたときの，実空間に投影した影の位相変化に対応しています．ちょうどねじを軸中心に回転させると，あたかもうず巻きが軸方向に移動してみえるのと同じ現象です．うず巻きが軸方向に移動してみえても，ねじの1箇所に印を付けておけば，その印の位置は軸方向には決して移動しません．このことは，波動の本質がエネルギーの伝搬であり，媒質は往復運動しているだけである，ということに対応しています．これに対して，φ の位相変化は，初期位

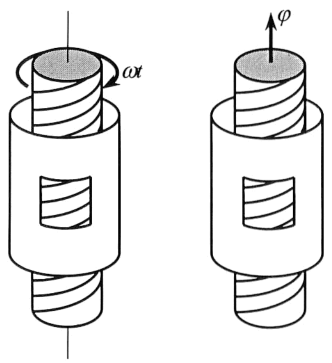

図3　モデル化した一次元平面波．(a) 回転，(b) 平行移動．

相の変化なので，図2のコイルばねを，r 軸方向に平行移動している状態に対応しています．

文字で書くと少々理解しづらいと思いますので，もう少し単純化したモデルを図3に示します．中をくり抜いた円筒の中に，もう1本の別の円筒が入っている状態をイメージしてください．内側の円筒の外周部には，らせん状の線が描かれています．ちょうど床屋さんの三色看板みたいなものです．また，外側の円筒には，内側の円筒が覗けるような窓が開けてあります．ωt の位相変化は，図3(a)のように，内側の円筒が回転している状態に相当します．図3(a) の矢印の方向に円筒が回転しているとき，覗き窓を見ていると，あたかも内側の円筒が上へ移動していくようにみえるでしょう．これに対して，φ の位相変化は，図3(b) のように，実際に円筒を上方へ平行移動させることに対応しています．さて，もし私たちが覗き窓しかみることができないとしたら，両者の違いを区別することができるでしょうか．

今回の光学工房では，光波の複素表示のモデル化をしてみました．モデル化というのは単純化することでもあります．したがって，実際の現象と対応がつかない点も，厳密にいえばあるかと思います．しかしながら，直観的な理解の助けのためには，十分に実用性がある手法だといえましょう．

この記事に関するお問い合わせは kato@optsun.riken.go.jp もしくは tanida@ist.osaka-u.ac.jp までお寄せください．

（梗津工業高等専門学校　小田　功）