# フーリエ変換法
## ── 不均質誘電体グレーティングへの応用 ──

山　﨑　恆　樹

## Fourier Transform Method: Application to Inhomogeneous Dielectric Gratings

Tsuneki YAMASAKI

In this report, Fourier Transform method, which is numerical analysis in the frequency domain, has been applied to the analysis of the scattering and guiding problems by inhomogeneous dielectric gratings using the combination of the multilayer division method. We also applied to the multilayered circular dielectric gratings such as photonic bandgap crystals. Numerical results are given for the transmission coefficients and propagation constants by varying the cross section of the rectangular profiles comparing with both TM and TE waves, and are also given for the propagation constants of photonic bandgap crystals by varying the cross section of the rectangular dielectric constants comparing with both TM and TE modes.

**Key words:** Fourier Transform, scattering and guiding problems, inhomogeneous dielectric gratings, multilayered circular dielectric gratings, photonic bandgap crystals

近年，種々の光集積回路デバイス（光グレーティング，光結合器，光導波路フィルター，ファイバーグレーティング）の設計において，実験によるデバイスの設計だけでは対応できなくなり，コンピューターシミュレーションの結果をもとに，デバイスの設計，実験の補間，実験結果の確認など，コンピューターシミュレーションが不可欠となってきている[1]．このようなシミュレーション技術においては，計算電磁気学の役割が不可欠で[2]，適用範囲が広く誤差評価や誤差制御が容易なコンピューターシミュレーション技術が望まれてきた．

最近，フォトニック結晶構造の光導波路の研究が注目を集めている[2]．フォトニック結晶光導波路（以下 PCOW とよぶ）は，波長程度の光を強く閉じ込めることができるため，周期構造に欠陥を設けることにより光を任意方向に曲げることが可能となる．これによって，新しいナノテクノロジー領域での光デバイスとして期待が高まっている[3]．しかし，ナノテクノロジーでは，光の波長と同程度となり設計が困難となるため，コンピューターシミュレーション技術により特性の把握が必要になってくる．現在，コンピューターの向上により，時間領域差分法（FDTD 法）[4] や有限要素時間領域ビーム伝搬法（FETD-BPM）[5] など種々の解析手法が提案されているが[6–10]，周期構造で欠陥を設ける場合に重要となるストップバンド領域での伝搬特性（特に減衰特性）については，詳細な解析例は示されていない．

ここでは，まず，周期構造媒体内のフーリエ変換法による電磁界解析法について述べ，応用例として，不均質誘電体グレーティングの散乱・伝搬問題，さらにフォトニック結晶導波路問題について解析した結果を紹介する．筆者らのフーリエ変換法は，多層分割法と併用することにより，解くべき連立方程式の次元数が電磁界の打ち切りモード数となり層内の分割層数とならない点で，多層構造を有するフォトニック構造導波路問題には特に有効な解法である．本解析法は，誤差評価や誤差制御が容易で，既存の計算機ライブラリーで計算でき（行列問題，固有値問題など），しかも散乱問題や伝搬問題が同じアルゴリズムで精度よく解析できる点で，コンピューターシミュレーションに適した解法である．

日本大学理工学部電気工学科（〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14）　E-mail: yamasaki@ele.cst.nihon-u.ac.jp

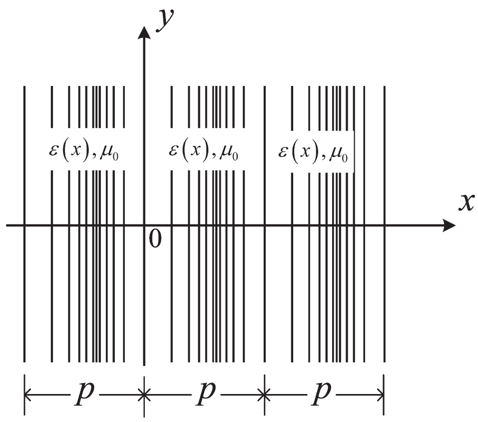


図１ 不均質媒質層.

## 1. 周期構造媒体内の電磁界解析法

電磁波が広い分野で利用されるに伴い，不均質媒質との相互作用が重要な問題となっている．特に，誘電率や誘電体形状が１つの空間座標の周期関数であるような周期構造媒体の電磁界解析においては，波長と同程度のデバイスを設計する必要があるので，入射波の偏波方向まで考慮して高精度に解析できる解法がいろいろと検討されてきた．有力な解法のひとつである空間高調波展開法[11]は，誘電率分布に不連続点をもつ場合には解析できない難点があった．

本報告では，周期構造媒体の電磁界解析法として，波動・信号工学で有用なフーリエ変換（通常は時間から周波数への変換（$t\to\omega$）であるが，ここでは空間から空間周波数への変換（$x\to n$）である）を紹介し，この解法が従来法の問題点を解決する解法であることを，図１の $x$ 方向に周期的に誘電率が不均質となる場合について要点を示す．

不均質媒質層は $y$ 方向に一様とし，電磁波の入射偏波は，TM 波[12]（磁界が $z$ 成分のみ）とし，透磁率 $\mu$ は真空の透磁率 $\mu_0$ とする．時間因子は $e^{j\omega t}$として，以下省略する．

$y$ 方向の伝搬定数を $h$（未知）とすると，$z$ 方向の磁界 $H_z$ は，$H_z\triangleq H(x)\cdot e^{jhy}$ となり，$H(x)$ を満足する微分方程式は次式となる[12]．

$$\frac{\mathrm{d}^2H(x)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{\varepsilon(x)}\frac{\mathrm{d}\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}+[k^2(x)-h^2]H(x)=0$$
$$k(x)\triangleq\omega\sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}=k_0^2\varepsilon(x)/\varepsilon_0,\quad k_0\triangleq\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=2\pi/\lambda_0 \tag{1}$$

ただし，$\varepsilon_0$，$\mu_0$，$\lambda_0$ は，それぞれ自由空間の誘電率，透磁率，波長である．

フロケの定理[5]を用いて $H(x)$ をフーリエ展開

$$H(x)=e^{-jg_0x}\sum_{n=-N}^{N}u_ne^{j2\pi nx/p};\ p=\text{周期} \tag{2}$$

する．ただし，$N$ は電磁界の打ち切りモード数，$g_0$ は，境界条件で決まる $x$ 方向の伝搬定数である．$\varepsilon(x)$ を次式のように分解しておく．

$$\varepsilon(x)/\varepsilon_0\triangleq f(x)/g(x) \tag{3}$$

式（３）は一見強い制限のように思われるが，工学的に重要な分布はほとんどが式（３）のように近似できる（逆二乗分布 $[=1+1/\{1+(x/p)^2\}]$ や sech 分布 $[=\mathrm{sech}(x/p)]$）．式（２），（３）を式（１）に代入し，フーリエ変換（$f(x)g(x)e^{-j2\pi mx/p}$ を掛けて１周期にわたって積分）すると，$h^2$ についての固有値方程式が得られる[12]．

$$\Lambda_1\mathbf{U}=h^2\Lambda_2\mathbf{U} \tag{4}$$

ただし，

$$\Lambda_1\triangleq[\eta_{m,n}],\quad \Lambda_2\triangleq[\zeta_{m,n}],\quad \mathbf{U}\triangleq[u_{-N},\cdots,u_0,\cdots,u_N]^T$$
$$\zeta_{n,m}\triangleq k_0^2\xi_{n,m}-\gamma_n\{\gamma_n\eta_{n,m}+2\pi(n-m)\eta_{n,m}/p-\varphi_{n,m}\}$$
$$\eta_{n,m}\triangleq\frac{1}{p}\int_0^p\{f(x)g(x)\}e^{j2\pi(n-m)x/p}\mathrm{d}x$$
$$\varphi_{n,m}\triangleq\frac{2j}{p}\int_0^p\left\{f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right\}e^{j2\pi(n-m)x/p}\mathrm{d}x$$
$$\xi_{n,m}\triangleq\frac{1}{p}\int_0^p\{f(x)\}^2e^{j2\pi(n-m)x/p}\mathrm{d}x$$
$$\gamma_n\triangleq(g_0+2\pi n/p),\ m,n=(-N,\cdots,0,\cdots,N) \tag{5}$$

式（５）の展開係数 $\eta_{n,m}$，$\varphi_{n,m}$，$\xi_{n,m}$ は解析的に求められる場合が多いので，適用範囲が広い．しかしながら，誘電率分布が不連続点を含む場合（例えば，ステップ分布）には，式（５）の $\eta_{n,m}$ が，$O(1/|n-m|)$ となり，$n,m\to\infty$ で $\xi_{n,m}\to0\,(n\neq m)$ とならない．この難点を解決するため，式（３）の $f(x)$（あるいは $g(x)$）を

$$f(x)\ \text{or}\ g(x)=\sum_{n=-N_f}^{N_f}\tau_ne^{j2\pi nx/p} \tag{6}$$

と $N_f$ 項までのフーリエ級数で近似し，$N$ を $N=\alpha N_f\,(\alpha\gg1)$ と関係づける．数値実験から，$N\geq1.5N_f$[12]とすれば精度よく求められるので，本解法は，$\eta_{n,m}$，$\varphi_{n,m}$，$\xi_{n,m}$ が収束級数であれば適用できる．なお，不連続点を含む誘電率をフーリエ展開するとギブズ現象[12]を生じるが，式（６）で十分大きな $N$ を用いればギブズ現象の問題点を解決できる[12]．

## 2. 不均質誘電体グレーティングへの応用

応用例として，図２(a) の不均質誘電体グレーティングの散乱・伝搬問題の解析例を紹介する．誘電体グレーティングは，光結合器，周波数選択フィルター，多層膜回折格

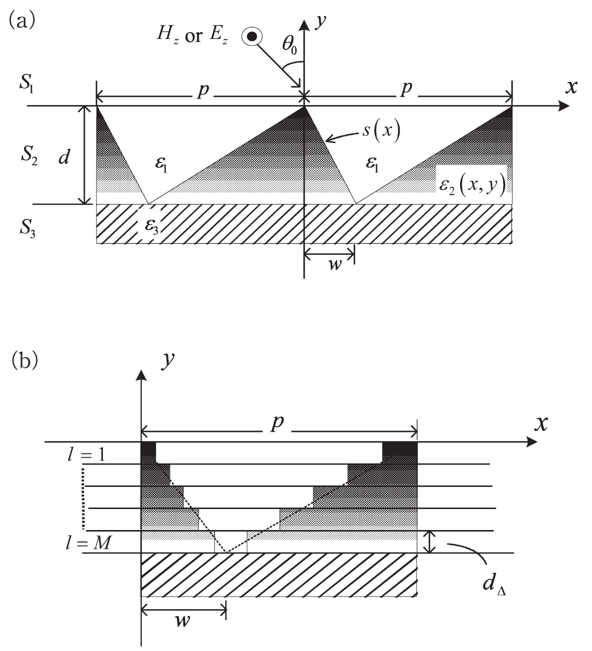


図2　不均質誘電体グレーティング．(a) 構造と座標系，(b) 不均質領域の多層分割．

子の設計等に重要なため，種々の解析法が提案され数値結果も報告されている．グレーティング形状が任意でグレーティング内の媒質が不均質の場合，グレーティング層を多層に分割し（分割数 $M$；図2 (b)）すれば，薄層内での誘電率 $\varepsilon(x, y)$ は，$x$ 成分のみの分布 $\varepsilon(x)$ で近似できるので，1章で求めた電磁界が利用できる．Moharam らは[13]，多層分割法と改良モード結合理論を併用して，レリーフ型や傾斜型グレーティングの散乱問題を解析しているが，解くべき連立一次方程式の次元数が層数とともに増加するので，散乱問題しか取り扱っていない．

本解法は，多層分割法とフーリエ変換法を併用して解析しているが[14-17]，解くべき連立一次方程式の次元数は分割層数によらず電磁界の打ち切りモード数となるため，散乱問題のみならず伝搬問題（特に傾斜型グレーティング[18]）にはきわめて有効である．

### 2.1　散乱問題の解析法

TM 波が $x>0$ から入射角 $\theta_0$ で入射する散乱問題[15]について要点を述べる．TE 波については数値結果のみ示す．各領域の電磁界は次式となる．

$$\underline{S_1(x\geq 0)}:\ H_z^{(1)}=e^{-jk_1(x\sin\theta_0-y\cos\theta_0)}+e^{-jk_1x\sin\theta_0}\sum_{n=-N}^{N}r_n^{(1)}e^{-j(k_n^{(1)}y+2\pi nx/p)} \tag{7}$$

$$\underline{S_3(x\leq -d)}:\ H_z^{(3)}=e^{-jk_1x\sin\theta_0}\sum_{n=-N}^{N}t_n^{(3)}e^{j\{k_n^{(3)}(y+d)-2\pi nx/p\}} \tag{8}$$

$$E_x^{(i)}=(\partial H_z^{(i)}/\partial y)/(j\omega\varepsilon_i)$$

$$k_n^{(i)}\triangleq\sqrt{k_0^2\varepsilon_i/\varepsilon_0-(g_0+2\pi n/p)^2},\quad g_0\triangleq k_1\sin\theta_0,$$

$$k_1\triangleq\omega\sqrt{\varepsilon\mu},\quad i=1,\ 3$$

$$\underline{S_2(-d<x<0)}: \tag{9}$$

$$H_z^{(2,l)}=\sum_{\nu=1}^{2N+1}\left[A_\nu^{(l)}e^{jh_\nu^{(l)}\{y+(l-1)d_\Delta\}}+B_\nu^{(l)}e^{-jh_\nu^{(l)}(y+ld_\Delta)}\right]\bullet f_\nu^{(l)}(x) \tag{10}$$

$$E_x^{(2,l)}=(\partial H_z^{(2,l)}/\partial y)/\{j\omega\varepsilon^{(l)}(x)\}$$

$$f_\nu^{(l)}(x)\triangleq e^{-jk_1x\sin\theta_0}\sum_{n=-N}^{N}u_{\nu,n}^{(l)}\,e^{j2\pi nx/p},$$

$$d_\Delta=d/M,\ i=1\sim M \tag{11}$$

ただし，$r_n^{(1)}$，$t_n^{(3)}$，$A_\nu^{(l)}$，$B_\nu^{(l)}$ は，境界条件から決まる反射係数および透過係数である．$y=0$，$y=-l\bullet d_\Delta(l=1\sim M-1)$，$y=-d$ の境界条件式

$$y=0:[H_z^{(1)}=H_z^{(2,1)}];[E_x^{(1)}=E_x^{(2,1)}] \tag{12}$$

$$y=-l\bullet d_\Delta(l=1\sim M-1):[H_z^{(2,l)}=H_z^{(2,l+1)}];\ [E_x^{(2,l)}=E_x^{(2,l+1)}] \tag{13}$$

$$y=-d:[H_z^{(2,M)}=H_z^{(3)}];[E_x^{(2,M)}=E_x^{(3)}] \tag{14}$$

において，式 (7)～(11) を式 (12)～(14) に代入し，$\{e^{i2\pi nz/p}\}$ の直交性を利用して，1層目の係数 $\mathbf{A}^{(1)}$，$\mathbf{B}^{(1)}$ と $M$ 層目の係数 $\mathbf{A}^{(M)}$，$\mathbf{B}^{(M)}$ の関係についてまとめると，次式となる．

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(l)}\\ \mathbf{B}^{(l)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{(1)} & \mathbf{S}_2^{(1)}\\ \mathbf{S}_3^{(1)} & \mathbf{S}_4^{(1)}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{(2)} & \mathbf{S}_2^{(2)}\\ \mathbf{S}_3^{(2)} & \mathbf{S}_4^{(2)}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{(M)} & \mathbf{S}_2^{(M)}\\ \mathbf{S}_3^{(M)} & \mathbf{S}_4^{(M)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(M)}\\ \mathbf{B}^{(M)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2\\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(M)}\\ \mathbf{B}^{(M)}\end{pmatrix} \tag{15}$$

ただし，

$$\mathbf{S}_k^{(l)}\triangleq[{}^{(l)}s_{n,\nu}^{(k)}],\ {}^{(l)}s_{n,\nu}^{(1)}\triangleq\frac{1}{2}[\nu_{n,\nu}^{(l)}+\theta_{n,\nu}^{(l)}\ h_{n+N+1}^{(l+1)}/h_\nu^{(l)}]e^{-jh_\nu^{(l)}d_\Delta}$$

$${}^{(l)}s_{n,\nu}^{(2)}\triangleq{}^{(l)}s_{n,\nu}^{(3)}\bullet e^{j\{h_{n+N+1}^{(l+1)}-h_\nu^{(l)}\}d_\Delta},{}^{(l)}s_{n,\nu}^{(3)}$$

$$\triangleq\frac{1}{2}[\nu_{n,\nu}^{(l)}-\theta_{n,\nu}^{(l)}\ h_{n+N+1}^{(l+1)}/h_\nu^{(l)}]$$

$${}^{(l)}s_{n,\nu}^{(4)}\triangleq\frac{1}{2}[\nu_{n,\nu}^{(l)}+\theta_{n,\nu}^{(l)}\ h_{n+N+1}^{(l+1)}/h_\nu^{(l)}]e^{jh_{n+N+1}^{(l)}d_\Delta};$$

$$k=1\sim 4,\ l=1\sim M$$

$$\mathbf{V}\triangleq[v_{n,\nu}^{(l)}]=[\mathbf{U}^{(l)}]^{-1}\bullet[\mathbf{U}^{(l+1)}],\ \mathbf{U}^{(l)}\triangleq[u_{n,\nu}^{(l)}],$$

$$\Theta\triangleq[\theta_{n,\nu}^{(l)}]=[\Phi^{(l)}]^{-1}\bullet[\Psi^{(l+1)}]$$

$$\Phi^{(l)}\triangleq[\phi_{n,\nu}^{(l)}],\ \Psi^{(l)}\triangleq[\psi_{n,\nu}^{(l)}],\ \phi_{n,\nu}^{(l)}\triangleq\sum_{m=-N}^{N}u_{\nu,m}^{(l)}\chi_{m,n}^{(l+1,l)},$$

$$\psi_{n,\nu}^{(l+1)}\triangleq\sum_{m=-N}^{N}u_{\nu,m}^{(l+1)}\chi_{m,n}^{(l,l+1)},$$

$$\chi_{m,n}^{(s,q)}\triangleq\frac{1}{p}\int_0^p\{f^{(s)}(x)g^{(q)}(x)\}e^{j2\pi(m-n)x/p}\mathrm{d}x$$

式 (15) の関係式を用いて，$M$ 層目の透過係数 $A_\nu^{(M)}(\nu=1\sim N)$ について整理すると，$(2N+1)$ 次元の方程式が得られる[19,20]．

$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{A}^{(M)}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{W}\triangleq[\mathbf{Q}_1\mathbf{S}_1+\mathbf{Q}_2\mathbf{S}_3-(\mathbf{Q}_1\mathbf{S}_2+\mathbf{Q}_2\mathbf{S}_4)\mathbf{Q}_4^{-1}\mathbf{Q}_3] \tag{16}$$

ただし

$$\mathbf{A}^{(M)}\triangleq[A_1^{(M)},\ A_2^{(M)},\ \cdots,\ A_{2N+1}^{(M)}]^T,$$

$$\mathbf{F}\triangleq[2k_0^{(1)}\eta_{0,-N}^{(1)},\ \cdots,\ 2k_0^{(1)}\eta_{0,0}^{(1)},\ \cdots,\ 2k_0^{(1)}\eta_{0,N}^{(1)}]^T$$

$$\mathbf{Q}_k\triangleq[q_{n,\nu}^{(k)}]\ ;\ k=1\sim4,\ n=(-N,\cdots,0,\cdots,N),\ \nu=1\sim(2N_f+1)$$

$$q_{n,\nu}^{(1)}\triangleq[\rho_{\nu,n}^{(1)}+\sigma_{\nu,n}^{(1)}],\ q_{n,\nu}^{(2)}\triangleq-[\rho_{\nu,n}^{(1)}+\sigma_{\nu,n}^{(1)}]e^{jh_\nu^{(1)}d_4},$$

$$q_{n,\nu}^{(3)}\triangleq-[\rho_{\nu,n}^{(M)}-\sigma_{\nu,n}^{(M)}]e^{jh_\nu^{(M)}d_2}$$

$$q_{n,\nu}^{(4)}\triangleq-[\rho_{\nu,n}^{(M)}+\sigma_{\nu,n}^{(M)}],\ \rho_{\nu,n}^{(i)}\triangleq h_\nu^{(i)}\sum_{m=-N}^{N}u_{\nu,m}^{(i)}\alpha_{\nu,m}^{(i)},\ i=1,\ M,$$

$$\sigma_{\nu,n}^{(1)}\triangleq\sum_{m=-N}^{N}\varepsilon_0k_m^{(1)}u_{\nu,m}^{(1)}\beta_{m,n}^{(1)}/\varepsilon_1,\ \sigma_{\nu,n}^{(M)}\triangleq\sum_{m=-N}^{N}\varepsilon_0k_m^{(3)}u_{\nu,m}^{(M)}\beta_{m,n}^{(M)}/\varepsilon_3$$

$$\alpha_{m,n}^{(i)}\triangleq\frac{1}{p}\int_0^p\{f^{(i)}(x)\}e^{j2\pi(m-n)x/p}\mathrm{d}x,$$

$$\beta_{m,n}^{(i)}\triangleq\frac{1}{p}\int_0^p\{g^{(i)}(x)\}e^{j2\pi(m-n)x/p}\mathrm{d}x,\ i=1,\ M$$

式 (16) の連立一次方程式は，既存のライブラリー（LU 分解）で計算でき，分割層数が増加しても，次元数は打ち切りモード数としているので伝搬問題は特に有効である．

$n$ 次空間高調波の電力透過係数 $|T_n^{(TM)}|^2$ は，次式で求められる．

$$|T_n^{(TM)}|^2\triangleq\varepsilon_1\ \mathrm{Re}\{k_n^{(3)}\}|t_n^{(3)}|^2/(\varepsilon_3k_1^{(1)}) \tag{17}$$

## 2.2 伝搬問題の解析法

伝搬問題[14] については，散乱問題と同様な手順で解析できるので要点を示す．$x$ 方向の伝搬定数を $\gamma(\triangleq\beta-i\alpha;\ \alpha<0)$ とすると，領域 $S_1$，$S_3$ の磁界は，次式で近似展開できる．

$$H_z^{(1)}=e^{-j\gamma x}\sum_{n=-N}^{N}r_n^{(1)}e^{-j(k_n^{(1)}y+2\pi nx/p)} \tag{18}$$

$$H_z^{(3)}=e^{-j\gamma x}\sum_{n=-N}^{N}t_n^{(3)}e^{-j\{k_n^{(3)}(y+d)-2\pi nx/p\}} \tag{19}$$

ただし，$k_n^{(i)}\triangleq\sqrt{k_0^2\varepsilon_i/\varepsilon_0-(\gamma+2\pi n/p)^2}$，$(i=1,3)$ である．$r_n^{(1)}$，$t_n^{(3)}$ は，未定係数で境界条件より求められる．伝搬問題の場合，$k_n^{(i)}$ の符号は通常の放射条件 [$\mathrm{Re}(k_n^{(j)})\geq0$, $\mathrm{Im}(k_n^{(j)})\leq0$] で，$n<0$ で $(\beta+2\pi n/p)>0$ の速波領域では $\mathrm{Im}(k_n^{(j)})\geq0$ となる点が散乱問題の場合と異なる．伝搬問題では，散乱問題の式 (16) で $\mathbf{F}=0$ に相当するので，散乱問題での $k_1\sin\theta_0$ を伝搬問題では $\gamma(\triangleq\beta-i\alpha)$ に置き換えればよい．散乱問題と同様に，$M$ 層目の透過係数 $A_\nu^{(M)}(\nu=1\sim N)$ についての方程式は

$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{A}^{(M)}=0 \tag{20}$$

となる．式 (20) から，$\mathbf{A}^{(M)}$ がゼロでない解をもつためには，次式の特性方程式が得られる．

$$\det|\mathbf{W}|=0 \tag{21}$$

伝搬定数 $\gamma(\triangleq\beta-i\alpha)$ は，式 (4) の固有値方程式と式 (21) の特性方程式を同時に満足するように決定する．

## 2.3 数値解析例

グレーティング形状 $s(z)$ は図 1 のように三角形状

$$s(x)\triangleq\begin{cases}-x/w & ;\ 0\leq x<w\\ -(p-x)/(p-w) & ;\ w\leq x<p\end{cases} \tag{22}$$

で $w/p$ をパラメーターとした．レリーフ内の誘電率分布は，厚さ方向に正弦波状

$$\varepsilon(x,z)\triangleq\begin{cases}\varepsilon_1 & ;\ \mathrm{s}(x)\leq y<0\\ \varepsilon_A\left[1+\delta\cos\left\{\dfrac{\pi}{d}(y)\right\}\right] & ;\ -d\leq y<s(x)\end{cases} \tag{23}$$

とした．構造パラメーターは，$d/p=2/3$，$\varepsilon_1/\varepsilon_0=\varepsilon_3/\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_2/\varepsilon_0=3(\varepsilon_A/\varepsilon_0=2$，$\delta=0.5)$ とした．伝搬問題の $\gamma$ は，ミュラー法[14] で計算（$\gamma$ の値が 7 桁目で変化しない刻み幅）し，基本となる最低次のモード（$\mathrm{TM}_0$，$\mathrm{TE}_0$）について検討した．

はじめに収束について考察する．図 3 は，TM 波の散乱問題の場合で，$\theta_0=45°$，$w/p=0.5$，$p/\lambda=0.6$，$N=9$，$N_f=6$（$\alpha=1.5$）としたときの $|T_0^{(TM)}|^2$ の収束である．図 4 は，伝搬問題（$\mathrm{TM}_0$ モード）で $p/\lambda=1$，$w/p=0.5$ のと

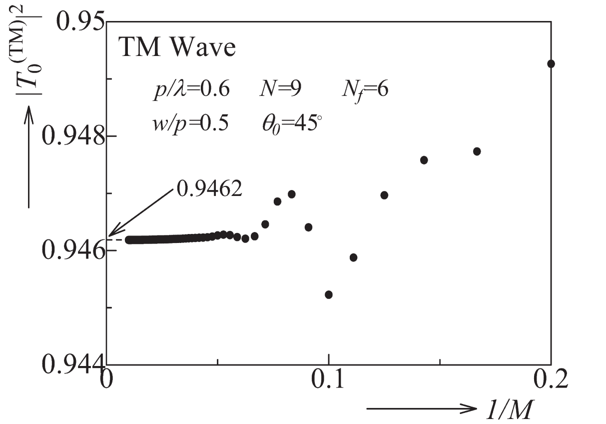


図 3　$1/M$ に対する $|T_0^{(TM)}|^2$．

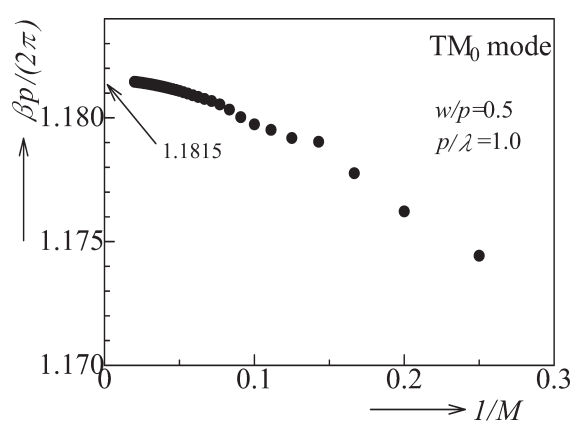


図 4　$1/M$ に対する $\beta p/(2\pi)$．

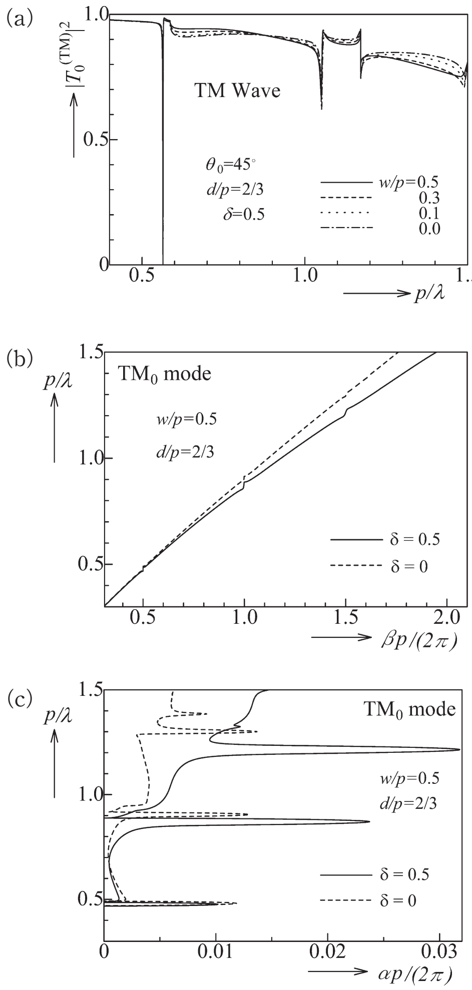


図5　散乱特性と伝搬特性（TM 波）．(a) 電力透過係数 $|T_0^{(TM)}|^2$，(b) 規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，(c) 規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$．

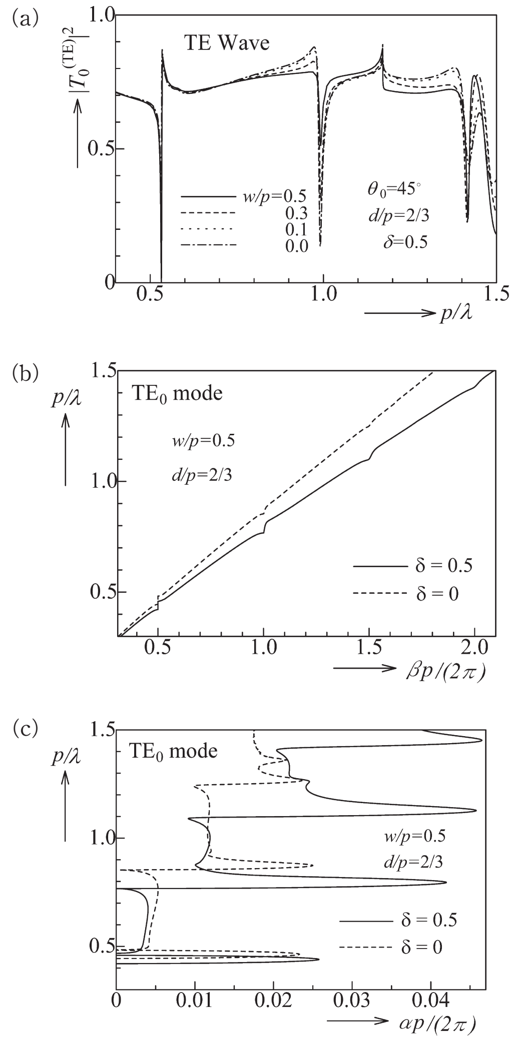


図6　散乱特性と伝搬特性（TE 波）．(a) 電力透過係数 $|T_0^{(TE)}|^2$，(b) 規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，(c) 規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$．

きの $1/M$ に対する規格化伝搬定数 $\beta p/2\pi$ の収束である．いずれの図からも，$M\gg 20$ とすれば真値との相対誤差を1% 以下にできる．数値解析においては，TM 波の場合 $M=30$，TE 波の場合 $N=10$，$M=20$ として計算した．また，エネルギー誤差は，TM 波および TE 波とも $10^{-3}$ 以下であった．

図5 (a)，図6 (a)，は $w/p$ を 0〜0.5 と変化したときの $p/\lambda$ に対する透過特性である．それぞれ TM 波と TE 波に対応している．図5 (b)，(c)，図6 (b)，(c) はそれぞれ，伝搬問題の規格化伝搬定数 $\beta p/2\pi$ と規格化位相定数 $\alpha p/2\pi$ である．図中には均質媒質（$\delta=0$）の場合も示した．図5，図6から，次のことがわかる．

(1) 形状（$w/p$）の影響は，TM 波で $p/\lambda\cong 0.6$ と $p/\lambda>1$ で現れ，TE 波では $p/\lambda>0.8$ で現れる．これは，$\alpha p/2\pi$ が不均質媒質と均質媒質で違いが大きく現れてくるところである．

(2) 均質媒質の $\beta p/2\pi$ は不均質媒質より大きい．これは，均質媒質ではレリーフ内の誘電率の平均が，不均質媒質のより小さくなるためである．

(3) $p/\lambda>0.6$ では，$\alpha p/2\pi$ は不均質媒質のほうが均質媒質より大きくなるが，特性の傾向は変わらない．

## 3.　フォトニック結晶導波路への応用

フォトニック結晶導波路の解析では，多層の円柱誘電体構造となる．ここでは，多層で柱状構造とし柱状内の誘電率分布は不均質構造の場合の適用法について要点を示し，円柱間に十字型方形誘電体（横長軸：$c_1$，横短軸：$c_2$）を装荷した誘電体構造が伝搬特性に及ぼす影響を検討した結果を紹介する[19-21]．また，円柱内を不均質とした場合の伝搬特性の影響についても考察した．

グレーティング領域 $S_2$ 内（$-D<x<0$）は，厚さ $d$ 間隔で $n$ 個の不均質柱状誘電体 $\varepsilon_2(x,z)$ で構成されている（$D=nd$）とする（図7 (a) は（$n=4$）の場合である）．2

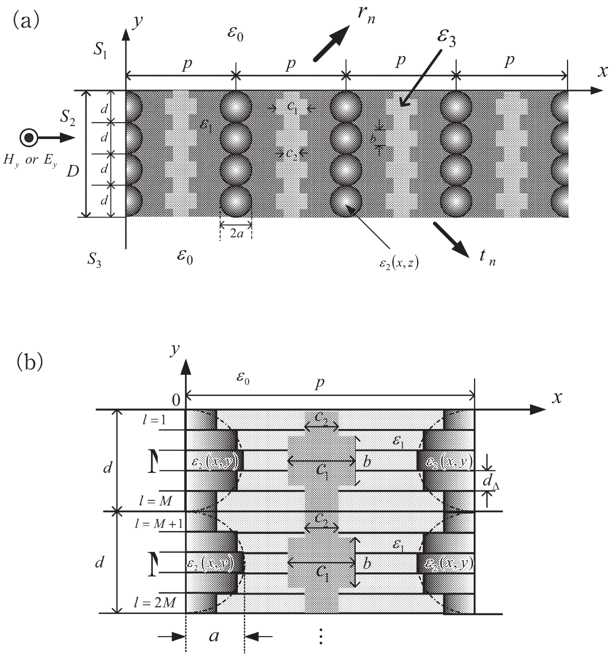


図 7　方形誘電体を装荷した多層柱状誘導体グレーティング．
(a) 構造と座標系，(b) 不均質領域の多層分割．

段目以降（$n\geq 2$）は，1 段目と同一構造である（図 7 (b)）．

$x=-d$ での境界条件より，1 段目最後の層の $\mathbf{A}^{(M)}$，$\mathbf{B}^{(M)}$ と 2 段目第 1 層の $\mathbf{A}^{(1)}$，$\mathbf{B}^{(1)}$ との関係式は，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(M)}\\ \mathbf{B}^{(M)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{(M+1)} & \mathbf{S}_2^{(M+1)}\\ \mathbf{S}_3^{(M+1)} & \mathbf{S}_4^{(M+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(1)}\\ \mathbf{B}^{(1)}\end{pmatrix} \tag{24}$$

となる．2 段目の第 1 層目の $\mathbf{A}^{(1)}$，$\mathbf{B}^{(1)}$ と 2 段目の最終層 $\mathbf{A}^{(2M)}$，$\mathbf{B}^{(2M)}$ との関係式は，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(1)}\\ \mathbf{B}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{(M+1)} & \mathbf{S}_2^{(M+1)}\\ \mathbf{S}_3^{(M+1)} & \mathbf{S}_4^{(M+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathrm{S}_2\\ \mathbf{S}_3 & \mathrm{S}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(2M)}\\ \mathbf{B}^{(2M)}\end{pmatrix} \tag{25}$$

と表せる．3 段目以降（$n\geq 3$）も同様に解析でき，一般に 1 段目の $\mathbf{A}^{(1)}$，$\mathbf{B}^{(1)}$ と $n$ 段目 $\mathbf{A}^{(nM)}$，$\mathbf{B}^{(nM)}$ との関係式は，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(1)}\\ \mathbf{B}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2\\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4\end{pmatrix}[\mathbf{F}]^{n-1}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(nM)}\\ \mathbf{B}^{(nM)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1' & \mathrm{S}_2'\\ \mathbf{S}_3' & \mathrm{S}_4'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{(nM)}\\ \mathbf{B}^{(nM)}\end{pmatrix} \tag{26}$$

となり，1 段目の $\mathbf{S}_1$〜$\mathbf{S}_4$ と 1 段目と 2 段目を接続する $\mathbf{S}^{(M+1)}$ のみを用いて関係づけられる．ただし

$$[\mathbf{F}]^{n-1}\triangleq\left[\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{(M+1)} & \mathbf{S}_2^{(M+1)}\\ \mathbf{S}_3^{(M+1)} & \mathbf{S}_4^{(M+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathrm{S}_2\\ \mathbf{S}_3 & \mathrm{S}_4\end{pmatrix}\right]^{n-1} \tag{27}$$

式 (27) の計算には，行列 $\mathbf{F}$ の固有値 $\lambda=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{2(2n+1)}\}$ と固有ベクトル $\mathbf{u}^{(\lambda)}=\{u_1^{(\lambda)},\cdots,u_{2(2n+1)}^{(\lambda)}\}$ を用いて，次式から計算する．

$$[\mathbf{F}]^{n-1}=[\mathbf{u}^{(\lambda)}]\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,n-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2(2n+1)}^{\,n-1}\end{bmatrix}[\mathbf{u}^{(\lambda)}]^{-1} \tag{28}$$

式 (26) を式 (15) の関係式に対応させれば，伝搬問題の特性方程式が得られる．

### 3.1　数 値 解 析

検討した不均質柱状誘電体（$-d<y<0$）の形状は，柱状形状

$$[(y+d/2)/(d/2)]^2+(x/a)^2=1 \tag{29}$$

とし，その誘電率分布 $\varepsilon_2(x,z)$ は，径（$r\triangleq\sqrt{x^2+y^2}$）方向に二乗分布

$$\varepsilon_2(x,z)\triangleq\begin{cases}\varepsilon_2[1-b\{(2(y+d/2)/d)^2+(x/a)^2\}]\,; \\ \qquad b=1-\varepsilon_1/\varepsilon_2：\text{柱状誘電体内}\\ \varepsilon_3：\text{十字型誘電体内}\\ \varepsilon_1：\text{柱状誘電体間}\end{cases} \tag{30}$$

とし，グレーティングの媒質と構造パラメーターは，$\varepsilon_1/\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_2/\varepsilon_0=3$，$D/p=2/3$，$d/p=1/6$ とした．

図 8 は，$\mathrm{TM}_0$ mode において縦比 $b/d=1/2$，$c_1/p=1/4$ を一定とし，柱状誘電体の誘電率分布を均質円筒（$\varepsilon_2/\varepsilon_0=3.0$）として十字型方形誘電体の横比（$=c_2/c_1$）を変化した場合における伝搬特性である．図 9 は，$\mathrm{TE}_0$ mode の場合である．$\mathrm{TM}_0$ mode および $\mathrm{TE}_0$ mode ともに，$c_2/c_1=0$ を実線，$c_2/c_1=0.25$ を一点鎖線，$c_2/c_1=0.5$ を破線，$c_2/c_1=0.75$ を二点鎖線，$c_2/c_1=1.0$ を点線で示した．図 8 と図 9 より次のことがわかる．

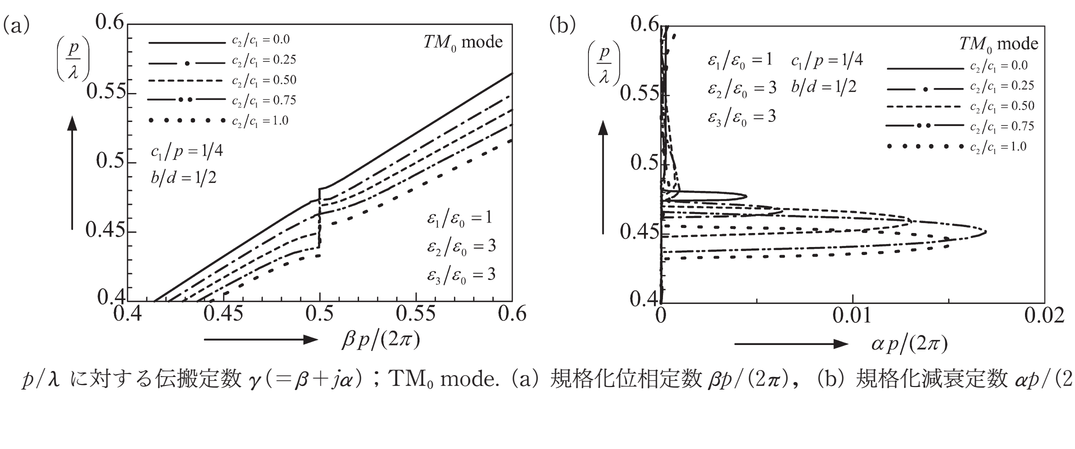


図 8　$p/\lambda$ に対する伝搬定数 $\gamma(=\beta+j\alpha)$；$\mathrm{TM}_0$ mode. (a) 規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，(b) 規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$．

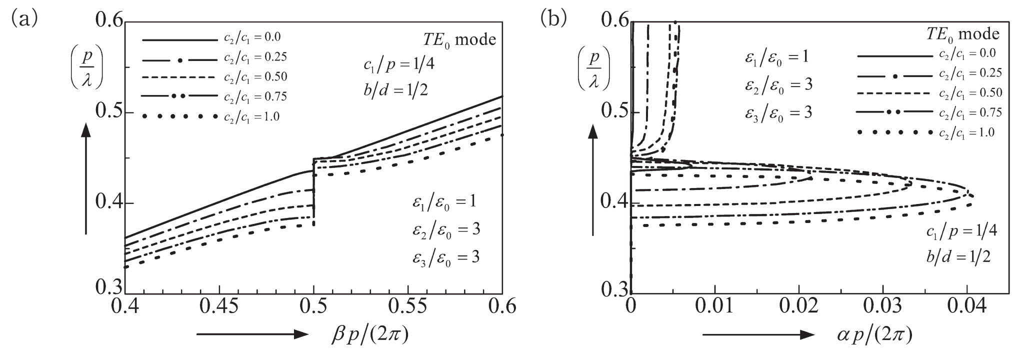


図 9　$p/\lambda$ に対する伝搬定数 $\gamma(=\beta+j\alpha)$；$TE_0$ mode.（a）規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，（b）規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$．

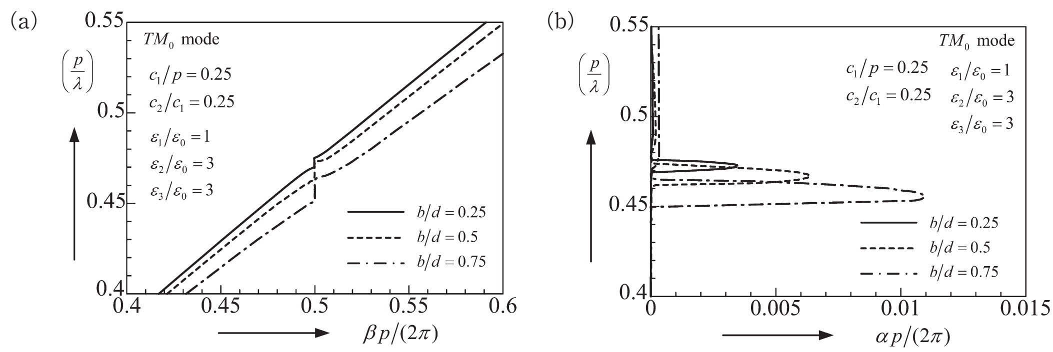


図 10　$p/\lambda$ に対する伝搬定数 $\gamma(=\beta+j\alpha)$；$TE_0$ mode.（a）規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，（b）規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$．

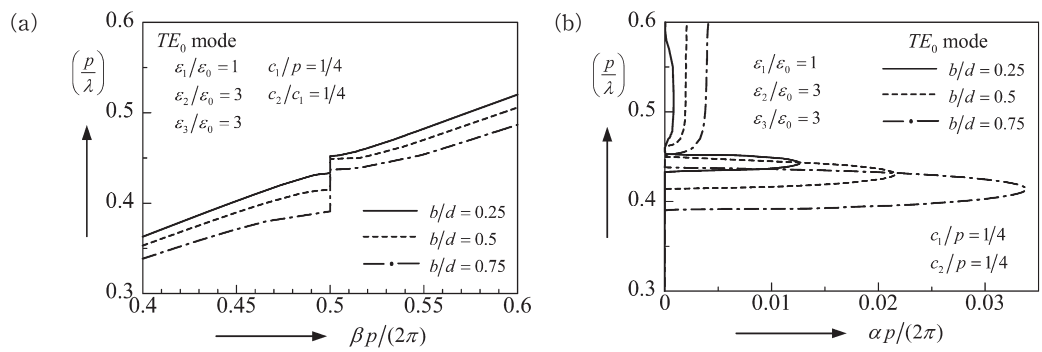


図 11　$p/\lambda$ に対する伝搬定数 $\gamma(=\beta+j\alpha)$；$TE_0$ mode.（a）規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，（b）規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$．

（1）$TM_0$ mode の場合，$c_2/c_1$ を大きくすると 1 周期内の等価誘電率が大きくなるため，Stop band 領域での遮断幅（$\beta p/(2\pi)=0.5$）は $p/\lambda$ の低いほうに移動し，その最大減衰量は大きくなる．

（2）$TE_0$ mode の場合，Stop band 領域での最大減衰量と遮断幅は $TM_0$ mode に比べて大きくなり，$TM_0$ mode に比べて Stop band 領域の周波数の高いところ（上部）でほぼ一致している．

図 10 は，図 8 で $c_2/c_1=1/4$ の場合において，十字型方形誘電体の縦比（$=b/d$）を変化した場合の伝搬特性である．図 11 は $TE_0$ mode の場合である．図 10 と図 11 から，十字型方形誘電体の縦比を変化すると，Stop band 領域は規格化周波数（$=p/\lambda$）の低いほうに移動し，最大減衰量と遮断幅も比例して変化することがみてとれる．

図 8 と図 9 の条件で，$c_2/c_1=1/2$ としたときの不均質円筒（$\varepsilon_2/\varepsilon_0=1$〜3）と均質円筒（$\varepsilon_2/\varepsilon_0=3$）の伝搬特性を比較したのが図 12 と図 13 である．図 12，13 から次のことがわかる．

（1）Stop band 領域での遮断幅と減衰量は，不均質分布の場合のほうが均質分布の場合と比べて大きい．これは，不均質円筒の等価誘電率が均質円筒の場合に比べて低いからである．

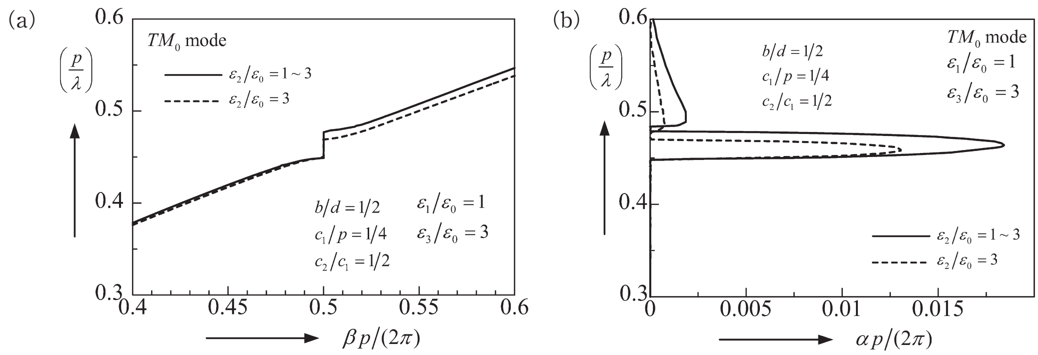


図 12　$c_2/c_1=1/2$ における均質円筒と不均質円筒の伝搬定数の比較；$\mathrm{TM}_0$ mode.（a）規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，（b）規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$.

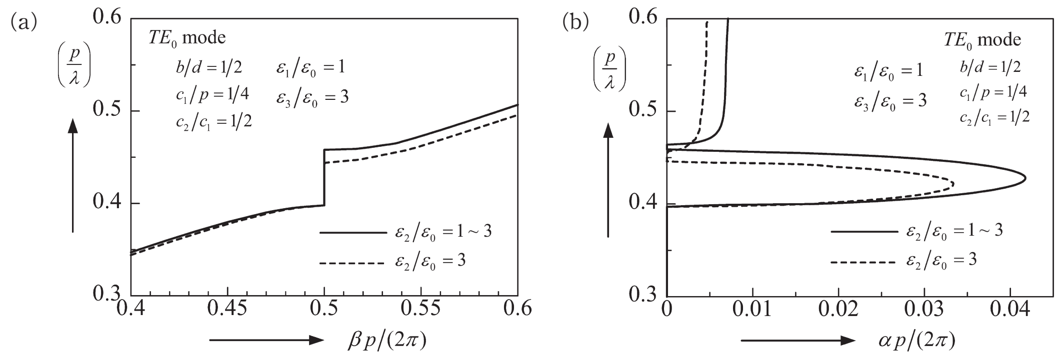


図 13　$c_2/c_1=1/2$ における均質円筒と不均質円筒の伝搬定数の比較；$\mathrm{TE}_0$ mode. (a) 規格化位相定数 $\beta p/(2\pi)$，(b) 規格化減衰定数 $\alpha p/(2\pi)$.

（2）分布の影響は，遮断幅の上部から現れる．

本報告ではフーリエ変換法の電磁界解析法について述べ，応用例として不均質誘電体グレーティングの散乱・伝搬問題，さらにフォトニック結晶導波路問題について解析した結果を紹介した．フーリエ変換法を適用する場合の利点は，

1）散乱・導波問題が同一アルゴリズムで高精度に解析でき，しかも誤差制御が容易である
2）媒質の形状や誘電率分布が任意に適用できる
3）ストップバンド領域付近の伝搬特性（位相特性と減衰特性）が高精度に解析できる

ことである．これはナノ構造へのいろいろな形状に適用できる点で有力な解法である．

## 文　　献

1）小柴正則：“光集積回路の設計・シミュレーション”，電子情報通信学会論文誌，**J77-C-I**（1994）159–167.
2）生野浩正：“計算電磁気学とは何か”，電気学会論文誌，**120-A**（2000）737–740.
3）特集「フォトニックナノ構造を中心とした光技術の最新話題」，オプトロニクス，**287**（2005）109–149.
4）A. Adibi, Y. Xu, R. K. Lee, A. Yariv and A. Scherer: “Properties of the slab modes in photonic crystal optical waveguides,” J. Lightwave Technol., **18**（2000）1554–1565.
5）M. Koshiba, Y. Tsuji and M. Hikari: “Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits,” J. Lightwave Technol., **18**（2000）102–110.
6）K. Sakoda: “Transmittance and Bragg reflectivity of two-dimensional photonic lattices,” Phys. Rev. B, **52**（1995）8992–9002.
7）H. Ikuno, Y. Noka and A. Yata: “Analysis of optical waveguide devices using the FD-TD method based on the principles of multidimensional wave digital filters,” Radio Sci., **35**（2000）595–605.
8）佐藤弘明，吉田則信，宮永喜一：“種々の媒質条件をもつ 2 次元フォトニック結晶光導波路の凝縮節点空間回路網による基本特性解析”，電子情報通信学会論文誌（C），**J84-C**（2001）954–963.
9）松本恵治，小松　実，山北次郎：“行列固有値法によるフォトニック結晶構造光導波路の解析”，第 33 回電気学会電磁界理論シンポジウム，EMT-04-97（2004）pp. 43–48.
10）Y. Ohtera, Y. Sasaki and S. Kawakami: “Postprocessing of FDTD solutions for precise calculations of eigenfrequencies of photonic periodic structures utilizing the variational expression,” J. Lightwave Technol., **22**（2004）1628–1636.
11）S. T. Peng, H. L. Bertoni and T. Tamir: “Theory of periodic dielectric waveguides,” IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **MTT-23**（1975）123–133.
12）山崎恒樹，日向　隆，細野敏夫：“周期的誘電率分布を持つ平面格子の電磁界解析”，電子情報通信学会論文誌，**J68-B**（1985）125–132.

13) M. G. Moharam and T. K. Gaylord: "Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings," J. Opt. Soc. Am., **72** (1982) 1385-1392.
14) T. Yamasaki, T. Hosono and J. A. Kong: "Propagation characteristics of dielectric waveguides with periodic surface-relief," IEICE Trans. Electron., **E74** (1991) 2839-2847.
15) T. Yamasaki, H. Tanaka, T. Hinata and T. Hosono: "Analysis of electromagnetic fields in inhomogeneous dielectric gratings with periodic surface relief," Radio Sci., **31** (1996) 1931-1939.
16) T. Yamasaki, T. Hinata and T. Hosono: "Scattering and guiding of electromagnetic waves in inhomogeneous dielectric gratings with periodic surface relief," Telecomm. Radio Eng., **54**, No. 8-9 (2000) 14-27.
17) T. Yamasaki, T. Hinata and T. Hosono: "Short optical pulse switching in three-core nonlinear fiber couplers," 電気学会論文誌 A, **122** (2002) 28-33.
18) H. Tanaka, T. Yamasaki and T. Hosono: "Propagation characteristics of dielectric waveguides with slanted grating structure," IEICE Trans. Electron., **E77-C** (1994) 1820-1827.
19) T. Yamasaki, T. Hinata and T. Hosono: "Scattering of electromagnetic waves by multilayered dielectric gratings with elliptically layered media," Telecomm. Radio Eng., **56** (2002) 100-108.
20) 山崎恒樹："フーリエ変換法"，計算電磁気学，電気学会編（培風館，2003）pp. 171-187.
21) 尾崎亮介，山崎恒樹，日向　隆："方形誘電体を装荷した多層柱状誘電体グレーティングの伝搬特性（その2）"，第34回電気学会電磁界理論シンポジウム，EMT-05-90（2005）pp. 41-46.

（2006年3月22日受理）