# 波動カオスの基礎と二次元共振器レーザーの研究動向

原　山　卓　久

## Wave Chaos and Two-Dimensional Microcavity Lasers

Takahisa HARAYAMA

Advances in processing technology, such as quantum-well structures and dry-etching techniques, have made it possible to create new types of two-dimensional (2D) microcavity lasers which have 2D emission patterns of output laser light although conventional 1D edge-emitting type lasers have 1D emission. 2D microcavity lasers have given nice experimental stages for fundamental researches on wave chaos closely related to quantum chaos. Besides, new types of 2D microcavity lasers can offer the important lasing characteristics of directionality and high-power output light. If laser action could occur in the 2D resonant cavities of arbitrary shapes, it would be possible to design the 2D shape of the cavity in order to make the emission pattern of the laser light appropriate to specific applications. Then, they may well find applications in optical communications, integrated optical circuits, and optical sensors.

**Key words:** 2D microcavity lasers, wave chaos, billiards, nonlinearity, ring laser gyroscopes

面発光レーザー，微小球・微小円盤，フォトニック結晶などの微小光共振器は，レーザーのようにわれわれの日常生活を支える実用的な工学応用から，光を長時間閉じ込め制御したり，新しい物性を発現させたり，といった基礎物理学まで，光にかかわる多くの場面で現れる非常に基本的なものである[1−5]．これら微小光共振器は離散的な共鳴周波数とそれに対応する波動関数によって特徴づけられる．この共鳴周波数と波動関数を求めるには，閉じた光線軌道上で光の波が定在波となるような条件を計算する近似が最も手っ取り早い方法である．より正確には波動方程式を適当な境界条件下で解く必要があるが，波長が十分短ければいつでも波動と光線とはよく対応し，正確な解は光線軌道上の定在波近似に一致すると光学分野では考えられている．

ところで，光線と波動の対応は古典力学と量子力学の対応と類似の問題であり，量子カオスという学問分野での主題である[6−11]．そこでは，量子・古典（波動・光線）対応は自明でないと考えられている．光学分野と量子カオス分野におけるこのような認識の違いは，想定している共振器形状の違いに起因している．そもそも光学分野における微小光共振器とはそれ自体に目的があるというよりは，光の出力や閉じ込めという目的が別にあって，それを達成するために必要な道具である．そのような道具としては，できるだけ簡単なほうが使い勝手がよいため，なるべく容易に光線で考察できるような形状が自然と採用されてきたと考えられる．一方，量子カオスの目的は，粒子の振る舞いに関する量子・古典対応が，粒子を閉じ込めている箱の形にどのように依存するかを解明することである．これを光学の言葉に翻訳するならば，光線・波動対応が共振器形状によってどのように変化するかを明らかにしようとしているということである．そのため，箱の形状としては，矩形や円形といった簡単な形以外のものこそが研究対象であり，そのような形状の微小光共振器の共鳴周波数や波動関数が詳しく調べられてきた．このように，量子カオスの分野では，類似の対象が光学分野での微小光共振器の場合とはまったく異なる観点で研究されてきたのである．

ATR 波動工学研究所非線形科学研究室（〒619-0288 けいはんな学研都市光台 2-2-2） E-mail: harayama@atr.jp

したがって，微小光共振器を用いて量子カオスと類似の問題を考察することは，光学の新しい基礎研究となりうることが期待できる．しかし，光の制御という観点を離れ，光線・波動カオスの基礎研究という観点だけから共振器形状を設計すると，たとえばその微小光共振器を用いたレーザーがどのような特性をもつのか，皆目見当もつかない．そのため，微小光共振器と量子カオスという似て非なる2つの異なる研究分野を最初に融合させたエール大学のA. D. Stone とR. K. Chang のグループは，ウィスパリングギャラリーモード（WGM）のレーザー発振など動作の理解の進んでいた円盤型共振器に対して，形状を少し変化させWGM からの特性の変化を議論するというアプローチを用いた[12−14]．一方，やはり早い時期に同じ問題意識をもって微小光共振器を舞台とした量子カオスの研究に着手したスタンフォード大学のA. E. Siegman のグループは，ファブリー・ペロー型共振器からの変形というアプローチを用いた[15,16]．どちらも，よく知られた形状の微小光共振器を基盤としていたことが光学分野で受け入れられることにつながった．その後，同様の問題意識で行われる研究が増し，次第に円やファブリー・ペロー型から大きく離れた共振器形状も研究されるようになり[17−32]，さらに，レーザー媒質の非線形光学効果まで含んだ二次元共振器レーザーの研究へと発展した[33−40]．

ところで，エール大学のグループの主張は円盤からの変形による実用的なご利益を強調しているが[12−14]，これは注目されている円形微小光共振器[2−4,41−47]との対比という観点で論文をまとめたためである．しかし，このような実用上の可能性はむしろ副産物であり，量子カオスに精通する彼らのより根源的な問題意識は，光線カオスとなるような形状の微小光共振器ではどのようなレーザー発振が起こるかということにあったと考えられる．また，もともと実用的なレーザーキャビティーに関しても深い知識をもつスタンフォード大学のグループは，むしろ安易に実用性について言及することを避け，レーザーキャビティーの新しい基礎物理学的問題であることを強調している[15,16]．このように，二次元共振器レーザーの研究では，時として，応用先を想定せず，波動カオスのレーザー発振そのものを研究対象とすることもある．つまり，円盤やファブリー・ペロー型の単純な形状の光共振器だけが長い間用いられてきたため，光に関する深い基礎的な問題が手つかずのまま残されており，それを研究することが二次元共振器レーザー研究のひとつの重要な側面なのである．

しかしながら，人工物であるレーザーを研究するからには，やはり実用上の可能性を追求することも自然であり，また，従来想定していなかったような形状の二次元共振器を用いれば新しい機能が生じうることを期待するのも自然である．実際，このような観点からもさまざまな形状の二次元共振器レーザーが提案され，いろいろな材料で実際に作製され，実験による評価が進んでいる[12−14,17,21,23,26−28,30,32]．このように，二次元共振器レーザーの研究は，基礎物理学的側面を追求する方向と実用的側面を追求する方向があり，これらが渾然一体となった形で研究が進められている．

本総合報告では，まず代表的な二次元共振器レーザーの特性を解説し，次に光線カオスや波動カオスについて説明し，これらの概念が先に解説した二次元共振器レーザーの動作の説明によく役立つことを解説する．次にこれらの概念とレーザー発振が関係するより深い問題へと進み，最後に，二次元共振器レーザーの応用に関して議論する．

## 1. 変 形 効 果

最初に微小光共振器と量子カオスとを融合させたエール大学グループは，光線力学としては部分的にカオスとなっているような円形から少し変形した共振器形状を用いた[12−14]．ここで，カオスとは，系の時間発展が決定論にしたがって進行しているにもかかわらず，初期条件に含まれるわずかな誤差が系の非線形性により増幅され，未来が予測不可能になってしまう現象である．このようなカオスとは正反対に，予測可能な運動形態を示すものを可積分系という．たとえば，円形共振器は，光線力学にしたがう軌道の未来が完全に予測できるので可積分系である．しかし，完全な円形や楕円形以外の多くの形状の共振器では，光線力学は完全な可積分系でも完全なカオス系でもなく，初期条件に応じて未来が予測可能になる場合と予測不可能となる場合があり，可積分とカオスとが混在している．このように部分的にカオスとなっている系は一般的であり，当時エール大学で行っていたジェットや液滴を用いたレーザー発振の実験を想定した場合，円から少し変形した形状が自然と形成されるため，部分的にカオスとなる系に関する議論が妥当であった．

また，ポリマーやガラスなどを材料とした研究蓄積の豊富な微小球や半導体微小円盤を用いた共振器は注目度が高く，これらの共振器との対比によって議論できることも好都合であった．これら微小球や半導体微小円盤を用いた共振器では，共振器端に沿うように光が局在するWGM の存在が知られている[2−4,41−47]．このWGM は全反射により閉じ込められるモードであるため $Q$ 値が非常に高く，レーザー発振の閾値を極端に低減できることが期待される．

また，光電子集積回路，共振器量子電磁力学，量子情報，近接場光学などさまざまな応用可能性があるため注目を集めている[1,3,5]．

このWGMは，いつも共振器端で臨界角より大きい一定の角度で反射する光線軌道に対応する共鳴モードである．このため，共振器形状を円から変形した場合には，光線軌道の共振器端における反射角度が一定ではなくなり，対応するWGMが存在できなくなる．エール大学のグループでは，このように円盤から変形された微小光共振器に対してカオス理論を援用することによってレーザー光の出射方向や$Q$値の低減を解析することができることを示し，実際にジェットや液滴のレーザーを用いて理論的な結果を実証することに成功した[12,13]．さらに，波動による扱いも行い，量子カオスとの関連で興味深い現象であるchaos-assisted tunnelingやdynamical localizationが二次元共振器を用いて光の現象としてとらえられることを示した[14]．

さらに，光線力学カオスに注目していたベル研究所のF. Capassoのグループは，エール大学のA. D. Stoneのグループと協力し，二次元的な共振器形状の量子カスケードレーザーを作製し，形状を円盤から徐々に変形することによってレーザー発振特性がどのように変化してゆくかを系統的に調べた[17]．このデバイス作製にはウェットエッチングを用いていたため，端面形状が設計と比べて少々正確さを欠く可能性もあるが，量子カスケードレーザーでは波長が非常に長く端面形状誤差の影響が小さいという利点があった．そして，ジェットや液滴を用いたレーザーでは任意の二次元形状を作製できないのに対して，半導体レーザーを用いれば自由に二次元形状を作製でき系統的な研究が行えることを示した．また，この研究によって，形状を適切に設計するとbow-tie（蝶ネクタイ）modeという大きな出力と指向性を有する共鳴モードのレーザー発振が得られることが明らかになった．さらに，さまざまな発振パターンをもつ複数のモードの中から，どのようなモードが励起され，実験的に得られるレーザー発振状態に至るのかということを理論的に説明することが必要であることなど，新しい問題提起ともなった．

これまで解説した円盤から変形した二次元共振器レーザーに対する解析理論は，カオス・量子カオス研究において発展したビリヤード問題とよばれる特別な力学系に適用される方法を基礎としている．そこで，上記レーザーについて詳しく説明する前に，まず次章ではさまざまな形状の二次元共振器を扱う場合に役立つビリヤード問題について解説する．

## 2. ビリヤード問題

ビリヤードとは，台の上に置かれた玉を棒で突く競技の，あのビリヤードのことである．競技上は玉の回転や摩擦が重要であろうが，数理物理でのビリヤードでは玉の軌跡だけに興味があるのであとは無視する．そうすると，玉は壁にぶつかる度に反射の法則にしたがって跳ね返され，永遠に台上を転がり続けることになる．このとき，台の形状と玉の軌跡の関係は興味深い問題である．ところで，玉の軌跡を光線軌道，玉が跳ね返る台の壁を共振器端と考えれば，ビリヤード問題は光共振器の問題のように思えてこないだろうか．前章では，WGMを有する円盤からの変形という光学分野における従来の研究との関係を強調したが，それとはまったく別のビリヤード問題という観点から考えても，二次元光共振器は魅力的な研究対象なのである．

このビリヤード問題が最初に論じられたのは，1900年にLord Kelvinが大英帝国王立研究所で行った講演「熱と光の力学原理を覆う19世紀の雲」においてであった[48,49]．当時，熱と光の力学理論の美しさを覆い隠すような2つの暗雲が立ち込めてきていた．ひとつはエーテルの存在であり，もうひとつはエルゴード仮説であった[50,51]．Lord Kelvinは，ビリヤード問題に関する一種の数値実験を助手に行わせることによって，このエルゴード仮説に対する反例を示し，雲を吹き飛ばそうとしたのである．

その後，熱統計力学の大前提であるエルゴードの問題は数学的に整備されてゆき，抽象的な数学モデルを用いた研究が長く続いた．ビリヤード問題も実際に実験を行える物理学としての具体的な対象ではまったくなかったが，抽象的な数学モデルに比べると，粒子の運動として想像できるという点から，数学的なアプローチが可能な物理学モデルとして発展した．そして，ようやく1970年に，その後Sinaiのビリヤードとよばれることになる形状のビリヤード台における質点に関するエルゴード問題が，Y. G. Sinaiの厳密な数学理論によって解決された[52]．さらに1979年には，スタジアム型に代表されるようなSinaiのビリヤードと異なるタイプの台の形状に関するエルゴード問題についても，L. A. Bunimovichにより厳密な証明が与えられた[53]．

このようにエルゴードの問題が数学的に発展してゆく一方で，コンピューターの開発によってエルゴード問題に関する物理学モデルの数値的な研究が進展していった．このような数値実験支援によるアプローチは1960年代ころから始まり，カオスの発見とも相まって，特に1980年代には非常に多くの研究がなされた．このような状況の中，

Sinai や Bunimovich が提案した形状のビリヤードモデルは，物理的実体のない空想的なモデルとはいえ物理学者にも想像しやすく，しかも数学的な土台の安定した稀なモデルとして，盛んに数値実験が行われるようになった．さらに，質点を量子力学的粒子であると想定した量子ビリヤードを用いた量子カオスの研究へと展開されるようにもなった[6−11]．

以上のように，ビリヤード問題は，Lord Kelvin，Sinai，Bunimovich と延々と受け継がれ，長い歳月を費やし厳密な数学理論として確立され，1980 年代には数理物理として大きく発展した．しかし，この当時までは，ビリヤード問題・量子ビリヤード問題とはあくまでも想像上のモデルに過ぎず，実際に実験が行われることになると予見していた科学者はほとんどいなかった．ところが 1990 年になると，マイクロ波を用いた擬似的な量子ビリヤードの実験が行われた[54]．続いて 1992 年に，1 $\mu$m 程度のスタジアム型のゲート電極によって作製された人工量子ドットに関する電子伝導の実験が行われ[55]，1994 年には STM によってスタジアム型に並べられた原子に閉じ込められた電子の固有関数が観測されるようになった[56]．そして，1995 年には，液滴の二次元共振器を用いたレーザー発振が行われた[13]．さらに最近の半導体微細加工技術の進展によって，任意形状の半導体二次元共振器レーザーが作製可能となった[17,20,21,25,31]．このように，数学者・理論物理学者の空想の世界の中で 100 年間深く理論的に考察されてきたビリヤード問題は，まさにいま，現代テクノロジーによって二次元共振器レーザーなどのデバイスとして具現され，実験研究が展開されるべき適切な時期を迎えているのである．

### 3. ポアンカレ横断面とバーコフ座標

共振器内外の屈折率差による閉じ込めは，臨界角条件など従来のビリヤード問題と少し異なる点があるものの，このような問題へのアプローチとして，ビリヤード問題に用いられていた手法を援用するというのも有効であろうと類推できる．実際，エール大学グループが円盤から変形した二次元共振器レーザーの説明のために導入したのが，ビリヤード問題におけるポアンカレ横断面という相空間での光線軌道を表示する方法である．この方法は，光線を二次元共振器上での位置ではなく，共振器端における光線の反射点で特徴づけるものである．光線力学を考えるうえでも全反射のための臨界角条件を考えるうえでも大変便利なこの方法は，力学系の研究でよく用いられている．それを二次元共振器レーザーの研究に援用したものであり，その後，二次元共振器レーザーの主要な解析方法のひとつとして定着している．

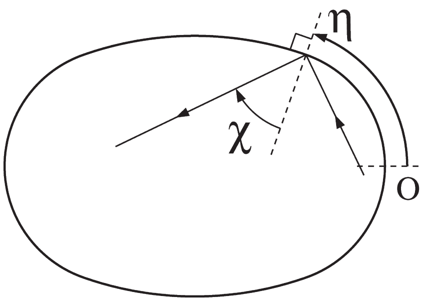


図 1　バーコフ座標．

ビリヤード問題に限らず，何かの運動を力学系としてとらえるときに，基本的な見方は相空間であることは解析力学で馴染み深い．これは，位置だけではなく，位置に正準共役な運動量も考えるという位置と運動量の空間である．しかし，自由度が 1 の系ならば，相空間は 1 つの位置と 1 つの運動量という二次元空間であり容易に想像できるし実際に描けるが，$N$ 自由度系の相空間は $2N$ 次元空間となりはなはだ複雑である．そこで，相空間の軌道を簡略化してとらえる方法としてポアンカレ横断面が知られている．さらに，直線的に動いては壁で反射するという独特な玉の運動を問題とするビリヤード問題では，相空間の記述の仕方も特別に考え出されている．この場合，壁との反射点と次の反射点との間では玉は直線的に動くだけなので，重要なのは次々と変化する反射点での情報である．つまり，共振器端上のどの点でどのような方向に反射するかさえわかれば，光線力学は完全に記述できる．そこでまず，図 1 に示すように，共振器端上のある点から共振器端に沿って測った反射点までの距離を位置座標と考える．次に，これに正準共役な運動量を考えると，それは反射点における運動量 $p$ の共振器端に沿う成分 $p\sin\chi$ である．ここで $\chi$ は反射角度である．したがって，このような位置座標と運動量成分の組みを反射点ごとに表示してゆくのが，ビリヤード問題の場合に特化されたポアンカレ横断面であり，光線軌道の相空間表示として最も適しているのである．このような座標は，これを最初に用いた数学者の名を冠してバーコフ座標とよばれている．

以下では，図 2 に示すように，1 つの変形パラメーター $\delta$ によって円からスタジアムへの変形を表すことができる卵形ビリヤードを用いて，形状と光線軌道の関係について説明する[31]．筆者らは，この卵形の二次元共振器レーザーを半導体レーザーとして実際に作製し，レーザー発振特性を解明している．この実際の素子の電子顕微鏡写真を図 3 に示す．

それでは，まず $\delta=1.0$ の円形のビリヤード台を考えよ

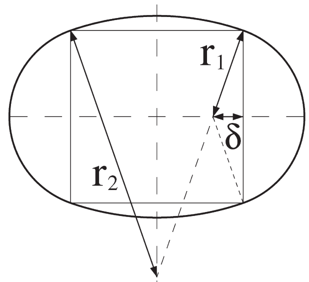
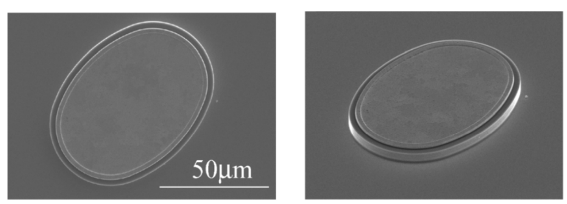



図２　卵形ビリヤード．まず正方形の一辺から $\delta$ の距離にある点を中心に半径 $r_1$ の円弧を描く．次に，この円弧の端と中心を通る直線と正方形を二等分する直線の交点を中心として半径 $r_2$ の円弧を描くことで，卵形ビリヤードを得る．$\delta=0, 1$ のときそれぞれスタジアム，円形となる．




(a)　(b)

図３　卵形（$\delta=0.45$）半導体二次元共振器レーザーの電子顕微鏡写真．

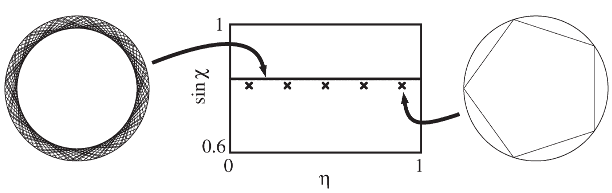



図４　軌道のバーコフ座標における表示．

う．この場合，反射点ではいつも同じ反射角度で跳ね返り，図４に示すように規則的な光線軌跡を描く．したがって，この光線軌跡を上述の相空間で表示すると，水平な線分上にプロットされる．また，ビリヤード台の壁への初期入射角度によっては周期軌道となり，バーコフ座標では有限個のプロットとなる．

次に，エール大学グループのように少し円を変形することを考えよう．もはや反射点では，ずっと同じ角度で反射されるようにはならない．このため，$\delta=0.9$ のとき光線軌跡を相空間表示すると，図５に示すように初期条件に依存していろいろなプロットとなる．まず，円形のビリヤードでは，光線力学で不変であった水平線が曲線となっている．また，短軸に沿って上下に行ったり来たりする周期軌道は安定化し，長軸方向に沿う周期軌道は不安定化する．ここで，周期軌道が安定とは，その周期軌道に対してわずかに異なる初期条件からスタートする光線軌道がその周期

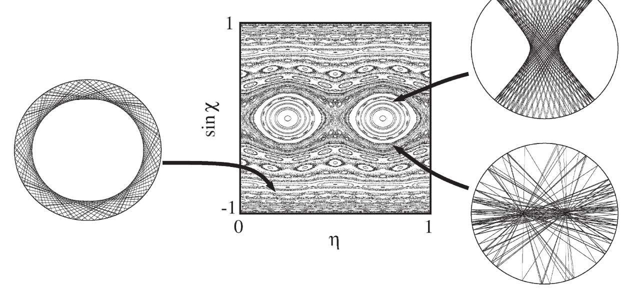



図５　$\delta=0.9$ のときの卵形ビリヤードのポアンカレ横断面とさまざまなタイプの軌道．

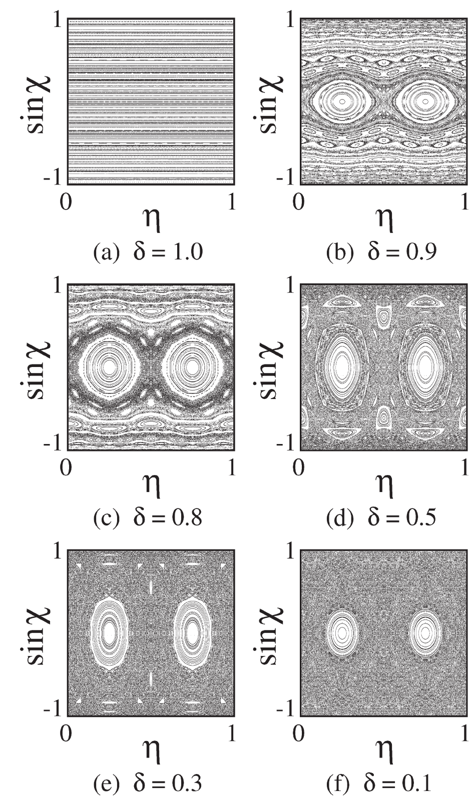



図６　ビリヤード台の形状の変化と軌道の関係．

軌道からずっと離れない場合である．反対に，どんなに近い初期条件からスタートしてもすぐにその周期軌道から離れてしまうとき，その周期軌道は不安定であるという．安定な周期軌道のまわりは閉曲線が取り巻いている．一方，不安定周期軌道のまわりはカオスの海となっている．そして，カオスの海は不変曲線にサンドイッチされている．図６に示すように，変形の度合いによって不変曲線が崩壊し，カオスの海が広がってゆくのがわかる．

## 4．円盤から少し変形した場合

バーコフ座標を用いた光線軌道のポアンカレ横断面を用

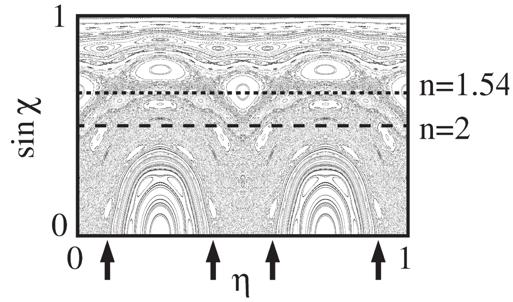


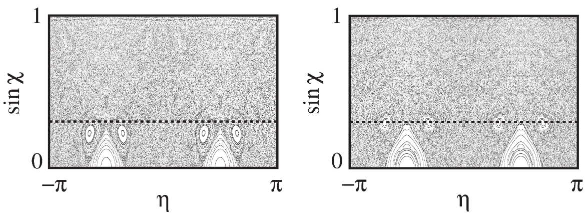

図7　quadrupole の光線軌道が描く相空間構造．

いて，quadrupole とよばれる共振器を解析し，二次元共振器レーザーにおける波動カオス研究のさきがけとなったエール大学グループのアイデアを紹介する[14)]．この quadrupole の共振器形状は，極座標表示したとき半径が $r=r_0(1+\varepsilon\cos 2\theta)$ という角度依存性をもつ．$\varepsilon$ が円からの変形の度合いを表すパラメーターとなる．$\varepsilon=0.072$ のとき，ポアンカレ横断面は図7のように，図5と類似のカオス軌道と規則的運動の軌道が共存した相空間構造となっている．このうちレーザー光と関係するのは，共振器端への入射角度がはじめのうち臨界角条件を満足し全反射により共振器内部に長く閉じ込められ，後にこれを破り共振器外部へと出射するようなカオティックな光線軌道である．そして，このようなカオティックな軌道の出射位置・角度は相空間の複雑動力学によって支配されており，これにより quadrupole 共振器レーザーの出射光パターンが決定される．

たとえば，共振器内部と外部の屈折率 $n$ がそれぞれ2と1のとき，臨界角 $\chi_c$ は $\sin\chi_c=1/2$ を満たす角度として与えられる．このとき，バーコフ座標による相空間において図7の破線より上の部分は，光線軌道の共振器端での入射角度が臨界角条件を満足していて光が全反射によって共振器内部に閉じ込められている状態に相当し，破線より下の部分に侵入するということは，光線軌道の共振器端への入射角度が臨界角条件を破って光が共振器外部へと出射することを意味する．したがって，$\sin\chi=1/2$ である破線よりも上のカオスの海から出発する光線軌道は，破線よりも上の領域を彷徨しているときは全反射により quadrupole 共振器内部に閉じ込められ続け，破線を横切り下の領域へと侵入した瞬間に臨界角条件を破り，共振器の外側に飛び出すことになる．ところで，$(\sin\chi,\eta)=(0,0.25)$ と $(0,0.75)$ は安定な2周期点であり，これらを不変曲線が取り囲んでいるのがわかる．この不変曲線は図5で右上に示したような規則的な軌道に相当し，カオティックな軌道とはまったく異質の運動である．つまり，カオティックな光線軌道がこのような不変曲線内部へと侵入することは不可能である．一方，破線よりずっと上の領域には，図5で左下に示したような規則的な軌道に相当する横断的な不変曲線が存在する．これもカオティックな軌道とはまったく異なるものであるため，カオティックな光線軌道はこのような不変曲線を通過することはできない．臨界角を表す破線付近ではこのような横断的な不変曲線は崩壊しているものの，その名残のように軌道の密度の高い曲線的な部分が存在する．この曲線はやはりカオティックな軌道と異質な運動に対応するため，カオスの海から出発した光線軌道はここを容易に通過できない．ところが，この曲線は2周期点を取り囲む不変曲線の影響で複雑な形状を呈しており，$\eta=0$ と 0.5 の付近でのみ破線よりも下側となっているため，カオティックな光線軌道はこの部分には簡単に侵入でき，そこで臨界角条件を破り，共振器外部へと出射する．つまり，出射位置はいつも共振器端上 $\theta=0$ と $\pi$ の2つの曲率最大点近傍となるのである．

このように，相空間においてカオティックな軌道の広がる範囲が安定周期軌道のまわりの不変曲線のため力学的に制限され，もともとの空間には障害物が存在しないにもかかわらず，レーザー光の出射方向が偏る現象を dynamical eclipsing という．このとき，光線は共振器端上の $\theta=0$ と $\pi$ の2つの点近傍からほぼ共振器端に沿うようにして出射するため，遠視野像は±90度方向にピークをもつようになる．

このような dynamical eclipsing の効果は，同じ共振器形状に対して屈折率が1.54であると状況がまったく異なってくる．その理由は，この場合カオティックな光線軌道が臨界角を表す $\sin(\chi)=1/1.54$ の点線を上から下に横切るとき共振器外部へと出射するが，この点線付近の相空間の構造は破線付近の相空間構造とまったく異なるためである．このときカオティックな光線軌道は，$n=2$ の場合の出射パターンを決定するのに中心的な役割を果たした横断的な曲線だけでなく，安定な4周期軌道を取り巻く不変曲線によっても，点線の下部領域への侵入経路が制限されることになる．ここで安定な4周期軌道は共振器端上曲率最大の点を反射点としている．このため，屈折率が2の場合のように曲率最大の点近傍から出射されることがなくなり，遠視野像に±90度方向のピークが失われ，カオスの海と点線の交わる4つの領域（図7の $\eta$ 軸下に矢印で示した）に対応する4つのピークが現れる．これら dynamical eclipsing は光線力学から得られる知見であるが，波動による解析でも同一の効果が示されている[14)]．




(a) (b)

図 8　flattened quadrupole のポアンカレ横断面．(a) $\varepsilon=0.125$，(b) $\varepsilon=0.15$．

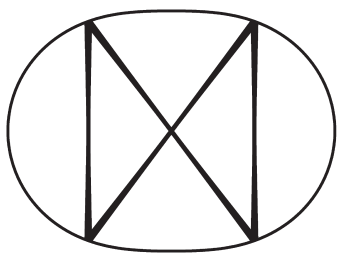


図 9　4 周期軌道．

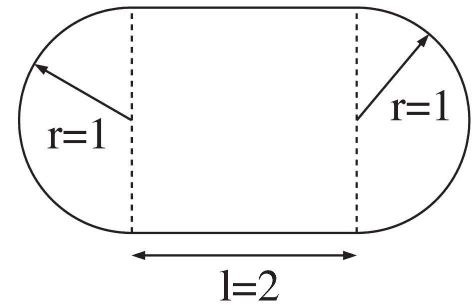
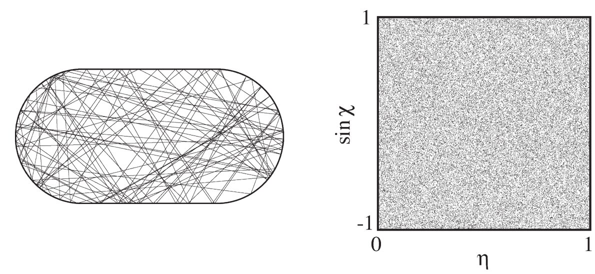



図 10　スタジアムビリヤード．直線と円弧で構成される．




(a) (b)

図 11　スタジアムビリヤードのカオス軌道．(a) 光線軌道，(b) ポアンカレ横断面．

## 5. 変形をより大きくした場合

ベル研究所，エール大学，およびマックスプランク研究所による量子カスケードレーザーの二次元共振器の研究では，半径が $r=r_0(1+2\varepsilon\cos 2\theta)^{1/2}$ で与えられる flattened quadrupole という形状を用いて，円から少しずつ変形した複数のキャビティーを作製し系統的に調べている[17]．このレーザーでは実行屈折率が 3.3 であり，quadrupole の変形パラメーター $\varepsilon$ が 0.125 のときには図 8 (a) に示すように臨界角に対応する $\sin(\chi)=1/3.3$ の直線よりも上の相空間はほとんどすべてカオスの海となっている．このとき，この臨界角に対応する直線のすぐ下に安定 4 周期軌道の存在が確認できる．この 4 周期軌道の共振器端における入射角度は臨界角条件を満足しないため，対応する共鳴モードを全反射だけで高効率に共振器内部に閉じ込めることはできない．ところが，より変形を大きくするとこの 4 周期軌道の共振器端における入射角度は大きくなり，図 8 (b) に示すように $\varepsilon$ が 0.15 となったときちょうど臨界角に一致する．このとき，この 4 周期軌道に対応する共鳴モードは全反射によって共振器内部に強く閉じ込められることになる．しかし，この 4 周期軌道と臨界角に対応する直線が接近しているため，モードの広がりによって臨界角条件を破り強い出力が得られる．

実際に，量子カスケードレーザーエピウェハーを加工して作製された二次元共振器レーザーに関する実験においても，同じ注入電流値に対して，$\varepsilon=0.14$ として設計・作製された二次元共振器では等方的で弱いレーザー発振光が観測されるが，$\varepsilon=0.16$ の場合には 4 周期軌道に対応する方向に強い指向性ビームが得られている．この 4 周期軌道が図 9 のように蝶ネクタイ（bow-tie）の形をしているので，この二次元共振器レーザーは bow-tie レーザーとよばれている．

## 6. スタジアムと波動カオス

次に，図 10 に示すようなスタジアムとよばれる形状のビリヤード台を考える[53]．この場合には，反射点と反射角度には円の場合のような規則正しい関係がなく，ほとんどすべての初期条件に対して軌道は予測不可能なカオティックな振る舞いとなり，図 11 に示すように相空間内を埋め尽くすようにプロットされる．この複雑な軌道の動きがカオスであることは，第 2 章で述べたように Bunimovich により数学的に厳密に証明されている[53]．このような場合，第 4 章と第 5 章で重要な役割を演じた安定周期軌道や横断的な不変曲線はまったく存在せず，これらに対応する共鳴モードも当然存在せず，ほとんどの共鳴モード波動関数は二次元共振器全体に広がった乱流を連想させるような複雑なパターンの波動カオスとなる（図 12 参照）．そして，カオティックな光線力学のため，共振器端への初期入射角度に臨界角条件を十分満足するように設定しても，その後の数回の共振器端での反射ですぐに臨界角条件を破っ

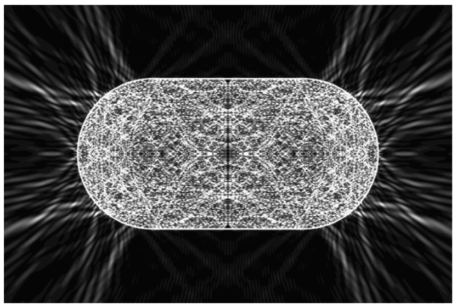


図 12　スタジアム型二次元共振器の共鳴モードの波動カオス．

てしまう．つまり，スタジアムのような完全カオスの二次元共振器レーザーでは，前述の臨界角条件を用いた二次元共振器レーザーの発振解析方法が適用できないのである．

このようにスタジアムに代表される完全カオスの二次元共振器レーザーは，これまで理論でも実験でもまったく扱われていないまったく未知の素子である．このような完全カオスの二次元共振器レーザーをどのように理論的に解析すればよいだろうか．また，実際にこのような形状の二次元共振器レーザーを作製した場合，発振するのだろうか．もしレーザー発振するならば，どのような発振パターンとなるのだろうか．その発振モードと共鳴モードとの関係はどうなるのだろうか．また，円盤のような可積分光線力学の二次元共振器レーザーと，発振特性はどのように異なるのだろうか．さらに，そのレーザー発振パターンと光線力学のカオスは関係あるのだろうか．

筆者らは，これらの疑問に答えるために，新しい二次元共振器レーザーの理論を確立するとともに，実際に半導体スタジアムレーザーを作製し，発振特性を実験により解明した[25,33−38]．作製方法は本特集号の福嶋氏の解説で詳述される．また，発振特性や光線力学カオスとの関係は，砂田・篠原・池田氏の総合報告と福嶋氏の解説で論じられる．次章では，新しい理論に関して，従来理論との違いに重点をおいて概説する．この理論に関しては，砂田・篠原・池田氏の総合報告においてより詳しく解説される．

## 7. 光とレーザー媒質の相互作用を取り入れた二次元共振器レーザー理論[33−38]

スタジアム型二次元共振器レーザーに対しては，臨界角条件をレーザー発振の判定条件として用いることができないため，従来理論では扱われていなかった損失を補うだけの利得があることを理論的に論じる必要がある．従来の一次元的な共振器レーザーに関する理論は，光をマクスウェル方程式にしたがう古典的な電磁場として扱い，レーザー媒質をたとえば二準位系として現象論的に緩和項を導入し光ブロッホ方程式により記述する，という半古典的な方法である．そして，発振閾値直後であれば，電場を共振器モードで展開し三次の非線形項までで打ち切る摂動論がよい近似であると考えられている．しかし，このようにして得られるレート方程式による解析は二次元共振器の場合には適用できない．なぜなら，二次元共振器の共鳴波動関数は完全直交系をなさないため，電磁場を共鳴波動関数で展開することはできないからである．したがって，電磁場とレーザー媒質の相互作用により最終的な定常発振状態が形成されるということを表現することが必要である．筆者らは，任意の電磁場を表現できるように強引な境界条件を課した束縛状態で展開するということを行わず，レーザーキャビティー端面で屈折率が突然変化するという境界条件下でマクスウェル・ブロッホモデルを数値的に解くことにより，スタジアムレーザーが発振可能であることを解明した．その結果，レーザー媒質のドープされたスタジアム型キャビティーでは，複雑なパターンをもつ波動カオスの共鳴モードが外部から注入されるエネルギーによって安定にレーザー発振することが明らかになった．

しかし，マクスウェル・ブロッホモデルは光の高速な振動を含んでおり，この細かい振動まで数値計算により再現しようとすると，数値シミュレーションに膨大な時間を要するため，動力学的性質を系統的に詳しく調べるということには適していない．そこで，この非常に速い光の振動を緩慢変化包絡線近似によって分離し，ゆっくり変化する部分だけを記述するように改良した．このとき，電磁場を記述するマクスウェル方程式が速い振動を取り除く近似によってシュレーディンガー方程式の形になるため，シュレーディンガー・ブロッホモデルとよんでいる．このように波動伝搬を表す部分をシュレーディンガー方程式に帰着させることは，ユニタリーな時間発展演算を高速に行うことのできるシンプレクティックインテグレーターが適用可能であるという数値計算の効率に加えて，レーザー発振のメカニズムを物理で慣れている様式で直感的に考察することを可能にするという利点もある．

このシュレーディンガー・ブロッホモデルを用いた大規模数値計算により，カオティックで複雑な波動関数パターンの共鳴モード間の非線形相互作用によるさまざまな発振形態が明らかになった．また，この理論的アプローチは，カオティックな二次元共振器だけでなく円盤や楕円のような可積分の場合，さらには quadrupole や卵形など部分的カオスの場合にも適用でき，2 モードのロッキング現象のような二次元共振器レーザーに普遍的な現象を見いだしたり，可積分型とカオス型共振器での多モード発振の相違を

解明したりなど，二次元共振器レーザーを解析する際に大変有効であることが示されている[33−38]．

## 8. 定常発振理論

前章では，カオティックなキャビティーにおけるレーザー発振に関する動力学的アプローチに関して報告した．これに対して，レーザー発振閾値直後で複雑な動力学的振る舞いの生じないような領域において有効な安定定常発振理論が，最近エール大学の A. D. Stone とスイス工科大学の H. E. Türeci によって確立されている[39,40]．この理論は，空間ホールバーニングを記述するために H. Haken と H. Sauermann によって導出された多モード発振における各モードの強度を決定する方程式[57]を，強度だけでなく発振周波数も同時に決める方程式に拡張した方法である．いいかえると，これは，前章で説明したマクスウェル・ブロッホモデルやシュレーディンガー・ブロッホモデルの定常発振状態の理論的解析方法である．

この理論で中心的な役割を演じるのは，constant flux state という一種の固有状態である．共振器の一種の固有状態として，従来重要な概念であると考えられているのは共鳴である．この共鳴波動関数は，共振器の外側において遠くに行くほど増大し発散する爆発解であり，そのような意味で共振器外側では意味をもたない．これに対して constant flux state は，共振器の外側では一定の実数の波数の外向き波として定義されるので爆発解とならないという点で，共振器の外側でも波動関数に意味をもたせることが可能である．しかし，このような条件を課すと，共鳴では共振器内外で波数が同じであるのに対して，constant flux state では波数が共振器内外で異なるため，固有状態としての物理的意味は共鳴に比べると明確でない．ところが，constant flux state がレーザー発振状態を表現できる一種の基底となっていることを示すことができるのである．つまり，constant flux state とは特殊な境界条件の課された線形のヘルムホルツ方程式の一種の解であるが，光と物質の相互作用を記述する非線形方程式の解を表すために役立つものである．

同じく線形のヘルムホルツ方程式の一種の解である共鳴も，レーザー発振状態に近いものであろうと考えられており，実際に非線形効果を含んだ取り扱いによってもそのことは明確に示されている[33−38]．しかし，爆発解である共鳴と定常なレーザー発振状態とを正確に理論的に結びつけることは困難である．このため，constant flux state の導入により共鳴とレーザー発振の関係がより明確になったことの意義は大きい．

## 9. 二次元共振器レーザーの応用

二次元共振器レーザーは，前章までに報告したような波動カオスのレーザー発振という基礎物理学的問題を論じる対象であるばかりではなく，まったく新しい応用に結びつく可能性のあるデバイスでもある．

すでに第 3・4 章で紹介したように，円い形をわずかに崩すことにより，全反射を利用し $Q$ 値をある程度低く保ちつつ光を共振器外部に取り出すことは，完全に全反射によって光を共振器内部に閉じ込め，エバネセント光をテーパーファイバー等により取り出す方法に比べて取り扱いが容易となる可能性がある．

また，カオスと安定周期軌道が混在するような共振器の場合，安定周期軌道に局在するガウシアンビームにより構成される共鳴波動関数が存在することが知られている[58]．これは，第 4 章で紹介した quadrupole 型共振器の bow-tie モードからの出射光がガウシアンビームであることを示唆している．すなわち，二次元共振器レーザーでは，安定周期軌道の設計により，二次元の任意の方向へすぐれたビームクオリティーの光を出射することが可能である[27]．また，安定周期軌道の共振器端における入射角度がすべて臨界角条件を満足するように設計すれば，ガウシアンビームのモードを全反射のみで閉じ込めることができる．そして，このモードをレーザー発振させ共振器内部に作り込んだ反射器によって，任意の方向に取り出すことが可能である[59]．さらに，複数の二次元的な共鳴波動関数のレーザー媒質を介した相互作用を利用した出射方向スイッチも可能である[26,28]．これらの応用に関しては，本特集号で福嶋氏により詳しく解説されている．

このような光源以外には，角速度センサー応用が二次元レーザーの特徴を生かした最もよい応用のひとつである[60]．光を利用した角速度センサーとしては，リングレーザージャイロとファイバーオプティックジャイロが実用化されている．従来のリングレーザージャイロは 3 つ以上の鏡を用いて光の閉軌道を構成し，この閉軌道に対応する時計・反時計回りのレーザー発振光に生じるサニャック効果を検出するものである．その角速度検出精度が他の方法よりも圧倒的に高いため，航空機のナビゲーションに標準的に使用されている．しかし，従来のリングレーザージャイロではレーザー媒質にヘリウムネオンガスの放電管が用いられており，サイズが大きく電源が重く消費電力も大きく非常に高価である．そこで，半導体により二次元共振器レーザーを作製し，光の閉軌道が共振器内部に自動的に構成されるように設計すれば，超小型で低価格のリングレーザージャイロを実現できる可能性がある．次章で，このよう

な試みを支える基盤となる，回転する二次元微小光共振器理論[60−62]について紹介する．

## 10. 回転する二次元共振器レーザーの理論とジャイロ性能

サニャックが光ジャイロのアイデアを提案したのは今から 90 年以上前の 1913 年であり[63,64]，その後，よい光源のなかった時代でも，地球の自転速度を観測するなど基礎物理学として盛んに研究された．そして，1960 年代のレーザーの発明後すぐにリングレーザージャイロが提案され，1980 年代には実用化された．また，ファイバーオプティックジャイロも 1970 年代に提案され，光ファイバーや周辺技術の進展により 1990 年代から実用化されている．このように光ジャイロの研究は長い歴史をもち，安全を重視する航空機のナビゲーションに標準的に用いられるほど成熟した技術であるため，その原理であるサニャック効果に関する理論も完全に確立していると考えられがちである．しかし，実は従来の理論[65−67]は，光の波長に比べてデバイスサイズが非常に大きい場合にのみ成り立つ近似理論であり，デバイスサイズが小さい場合には適用できないのである．

最近，筆者らは，素子サイズの小さな二次元共振器レーザーを用いたジャイロ理論を確立した[60−62]．以下で紹介するように，この新しい理論により，マイクロキャビティーを用いたレーザージャイロでは，二次元共振器の形状がジャイロ性能を決定的に左右することが明らかになった．

まず，共振器が回転しており，加速度があるため，一般相対性理論をマクスウェル方程式に適用することが出発点となる．TM モード（TE モード）の角周波数 $\omega$ で振動する安定発振解を

$$E_z(H_z) = \psi(r)\, e^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.}$$

とすると，定常状態の方程式

$$(\nabla_{xy}^2 + n^2 k^2)\,\psi - 2\mathrm{i}k\,(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\,\psi = 0 \qquad (1)$$

が得られる．ここで $n$ は屈折率であり，波数 $k=\omega/c$ である（$c$ は光速である）．また，$\boldsymbol{h}$ は回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}=(0, 0, \Omega)$ を用いて $\boldsymbol{h}=\dfrac{1}{c}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})$ と定義される．ここで $\Omega$ は，反時計回りを正方向とする回転角速度である．

式（1）は通常のヘルムホルツ方程式に回転の効果を表す摂動項が加わった形となっているため，固有状態を調べるのに量子力学でよく知られている摂動論を援用できる．その準備として，回転していないときの固有周波数と波動関数についての情報が必要である．完全な円形や特別な対称形状でない一般的な形状の共振器では，ヘルムホルツ方程式の波動関数は実関数つまり定在波であり固有周波数に縮退はないので，このような状況を想定する．このとき，互いに隣り合う固有波数の差を $\Delta k_0=\Delta\omega_0/c$，それぞれの固有波数に属する波動関数を $\psi_0$，$\psi_1$ として，これらの固有状態を用いて角速度閾値 $\Omega_{\mathrm{th}}$ を定義する：

$$\Omega_{\mathrm{th}} = \frac{n^2}{2}\left|\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\psi_0\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1\right|^{-1} c\Delta k_0 \qquad (2)$$

ここで，$D$ は二次元共振器を表す．このような準備のもと，量子力学の摂動論を適用すると，角速度の入力に対する周波数差 $\Delta\omega$ や波動関数 $\psi$ の変化を調べることができ，以下の結果が得られる．まず，入力角速度が $\Omega_{\mathrm{th}}$ よりも非常に小さい場合，周波数差は変化しない．すなわち，$\Delta\omega=\Delta\omega_0$ である．このとき，固有関数は $\psi=\psi_0+\sum_{l\neq 0} c_l\psi_l$ となるので，他の波動関数の寄与は係数 $c_l=2\mathrm{i}k_0\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\dfrac{\psi_l(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\,\psi_0}{n^2(k_0^2-k_l^2)}$ によるが，この被積分関数の分母は $l$ によらず非常に大きいため $C_l$ はほとんど 0 である．つまり，波動関数も定在波のまま変化しない．このような角速度の変化を感知できない $\Omega_{\mathrm{th}}$ 以下の領域の存在が，従来の理論では知られていなかった．これに類似の現象として，ジャイロ性能を左右するロックインとよばれる現象は知られていたが，これは後方散乱とレーザー媒質の非線形効果によるものであり，線形理論の範囲でこのような現象は起こりえないと考えられていた．

次に，入力角速度が $\Omega_{\mathrm{th}}$ よりも非常に大きい場合について説明する．このとき，周波数差は

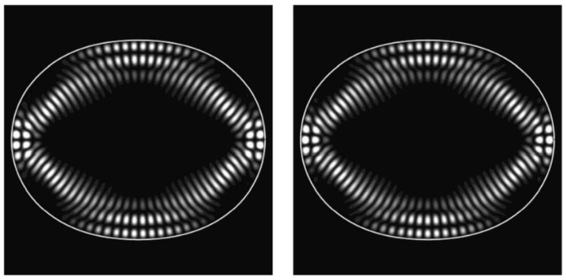
$$\Delta\omega = 2\left|\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\psi_0\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1\right|\frac{\Omega}{n^2} \qquad (3)$$

となり，角速度に比例して増加する．また，波動関数は

$$\psi = c_0\psi_0 + c_1\psi_1 \qquad (4)$$

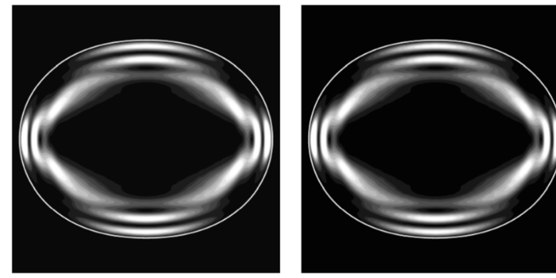
となる．ここで $c_1=\pm\mathrm{i}c_0$ である．つまり，波動関数は静止時の隣接する波動関数を同じ割合で合成したものに遷移するのである．

このように，角速度が $\Omega_{\mathrm{th}}$ より十分小さい場合と十分大きい場合の周波数分裂については摂動論によって議論できるが，それら以外の角速度の全領域に関しては理論的に扱うことができない．したがって，このような領域まで含めて回転する二次元共振器における定常状態の方程式を数値的に解くことも重要である．そこで，第 4 章で紹介した quadrupole 共振器で菱形の安定な 4 周期軌道が存在するように形状パラメーターを $\varepsilon=0.12$ に設定し，この 4 周期軌道に関連する共鳴モードを数値的に求め，これらの共鳴モードの固有周波数と波動関数が角速度に対してどのように変化するかを調べ，次のような結果を得た[60]．



(a) (b)

図 13　静止時の近縮退モード．波動関数は定在波であり，固有周波数は（a）49.3380585，（b）49.3380615．



(a) (b)

図 15　角速度が十分速い場合，周波数差は角速度に比例し，波動関数は回転波となる．

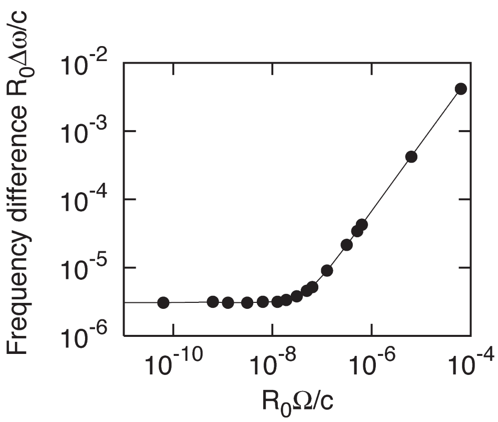



図 14　角速度と周波数差．角速度の遅いときには周波数差は増加しない．

まず，回転していないときには，図 13 (a) と (b) のような 2 つの定在波が共鳴モードである．これらの固有周波数は互いに異なるので，これらを重ね合わせて伝搬波とすることはできない．波長に比べて共振器サイズがはるかに大きい短波長極限では，固有周波数の違いは非常に小さいため，定在波の重ね合わせにより伝搬波を表現することはよい近似となる．しかし，それでも特別な対称性をもち縮退した固有周波数をもつような特殊な形状でない限り，二次元共振器の厳密な固有関数は必ず定在波であって，これらを用いて伝搬波を表現することは厳密には不可能であり，ジャイロ性能に関して極限的な精度まで議論する場合には，固有関数が定在波であるか，伝搬波であるかには注意を要する．

次に，少しずつ回転させてみよう．回転が始まっても，角速度の小さいときには図 14 に示すように周波数差は回転していないときのままであり，共鳴モードも定在波のまま変化しない．ところが，図 14 からわかるように，角速度がある程度大きくなると，周波数差は角速度に比例して増大する．このとき，2 つの共鳴モードは図 15 (a) と (b) のような回転波へと遷移する．このように，数値計算により摂動理論の正しさと共鳴モードの変化の様子がわかる．

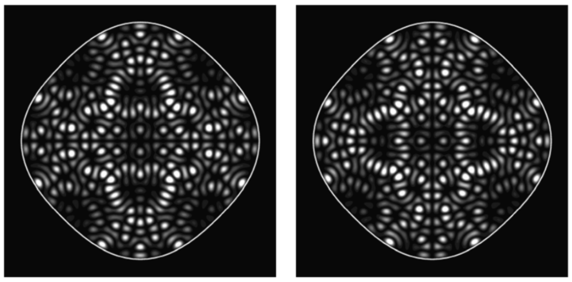
ところで，実用的な観点からは，角速度の変化を感知できない $\Omega_{\rm th}$ 以下の領域をなるべく小さくすることが重要である．そこで，筆者らは，二次元共振器形状の対称性の工夫により，この角速度不感知帯を原理的には消滅させることができることを理論的に示した[61]．

また，ここで紹介した理論は，一次元系にも適用でき同様な結果が得られる．筆者らのグループでは，このような一次元系の例として，半導体光増幅器と光ファイバーを組み合わせたリングレーザーを用いて，レーザー発振モード間の周波数差の角速度依存性を実験により解明している[68,69]．この実験においても，理論予想と一致した結果が得られている．

## 11.　波動カオスとサニャック効果

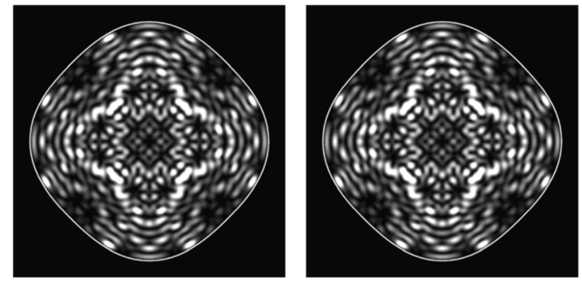
前章では，quadrupole 共振器の安定周期軌道に対応する定在波共鳴モードは角速度が大きくなると回転波となり，時計回り・反時計回りの光の周波数差が角速度に比例するというサニャック効果が生じることを紹介した．本章では，安定周期軌道と対応しないカオティックな波動関数の場合でも，サニャック効果と類似の現象が生じることを紹介する[62]．

前章で紹介した角速度の不感知帯は回転していないときの周波数差に依存しており，たとえば $C_{4\rm v}$ の対称性をもつ二次元共振器の縮退する 2 つのモードでは，周波数差がないため不感知帯は消滅する．そこで，$C_{4\rm v}$ の対称性をもったカオティックキャビティーとして形状が $r = r_0(1 + \varepsilon \cos 4\theta)$ で与えられる共振器を考える．回転していないとき，図 16 (a) と (b) のような縮退する 2 つの波動カオスモードが存在する．回転したときには，図 17 に示すように角速度に比例する周波数差が生じる．共鳴モードも図 18 (a) と (b) に示すように定在波ではなくなるが，一方向に回転するような伝搬波モードとはならない．このことは図



(a) (b)

図16　$C_{4v}$ 対称二次元共振器の縮退共鳴モード．(b) は (a) を90度回転させた波動関数に一致する．



(a) (b)

図18　回転により周波数分裂を起こした2つの共鳴モード．

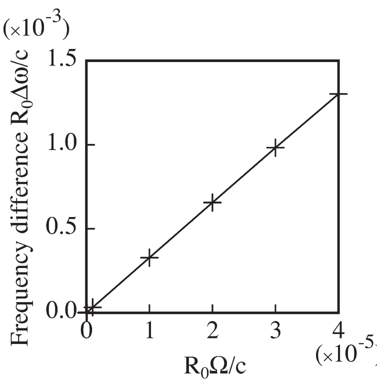


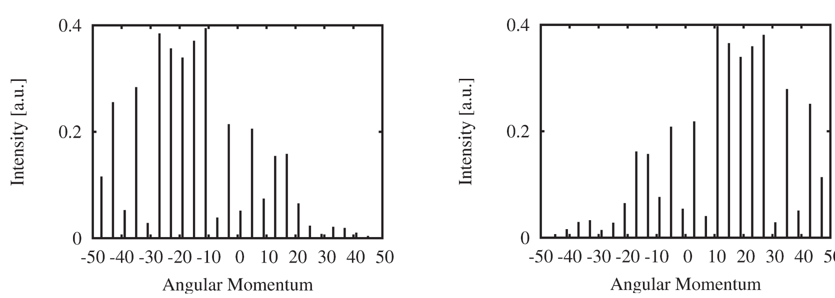

図17　角速度 vs. 周波数差．

18の波動関数をベッセル関数で展開し角運動量成分を表示すると，図19に示すように正負両方向回転波成分を含んでいることからわかる．

本章と前章で説明したように，キャビティーを回転すると固有周波数の分裂が起こり，分裂した周波数差が角速度に比例し，対応する共鳴波動関数は回転していないときと異なるものに遷移する．このとき，安定な周期軌道が存在するような形状の共振器の場合には，それらに対応する共鳴が回転により分裂を起こし，共鳴モード波動関数は回転波に遷移する．したがって，時計・反時計回りの2つの回転波モード間に生じる周波数差という従来のサニャック効果の解釈が可能となるのである．ところが，共鳴モードが波動カオスである場合，周波数分裂は生じても従来のサニャック効果のような時計・反時計回りの2つの回転波モードによる解釈が成り立たず，さらには，波動描像に対応する光線軌道も存在しないため，光線を質点の古典力学的運動と考えて相対論を適用する光線力学によるサニャック効果の説明も不可能である．

このように，回転する二次元共振器の共鳴に関する理論は，ジャイロ応用という実用上の重要性に加えて，サニャック効果の本質が時計・反時計回りに伝搬する光にあるのではなく，回転による固有周波数の分裂にあるという基礎物理学上の重要な発見も含んでいるのである．

量子カオスを拡張した学問分野である波動カオスが，精密加工技術の発展により二次元共振器レーザーという現実のデバイスを用いた研究へと展開していることを報告した．特に量子カオス・波動カオスと二次元共振器レーザーを結びつけるという点で重要なビリヤード問題の歴史とバーコフ座標という臨界角を議論するのに有効な方法について紹介し，これを用いた解析やスタジアム型のようなカオティックな二次元共振器におけるレーザー媒質の非線形効




(a) (b)

図19　図18の2つの波動関数に含まれる角運動量成分．

果を含んだ動力学的理論や定常発振理論について解説した．また，二次元共振器レーザーの研究が，スイッチや回転センサーなどの応用へと広がっていることを紹介した．さらに，それらの応用を追究すると，サニャック効果の新理論など二次元共振器に関する新しい基礎物理学的発見が得られることについても解説した．

光を考えるとき，状況に応じて漠然と光線としてとらえたり波動としてとらえたりすることが多いものであるが，その根底には両者はそれほど違わないという常識がある．しかし，光の波動カオスとは，そのような従来の光学の常識ではいわば想定外の状況であり，単純な光線と波動の対応は成り立たない．このような光に関する新しい状況設定である波動カオスを深く考察することは，光の波動的側面の本質を解明することにつながり，まったく新しい光の応用を生み出す可能性があるものと期待される．

本論文の内容は，立命館大学池田研介教授と岡山県立大学福嶋丈浩准教授のご協力をいただいております．ビリヤード問題の歴史的背景に関しては広島工業大学久保泉教授にご教示いただきました．また，本研究は情報通信研究機構の研究委託により行われております．ご協力いただきました皆様に心より感謝申し上げます．

## 文　　献

1) Y. Yamamoto and R. E. Slusher: “Optical processes in microcavities,” Phys. Today, **46** (1993) 66–73.
2) R. K. Chang and A. K. Campillo, ed.: *Optical Processes in Microcavities* (World Scientific, Singapore, 1996).
3) K. Vahala, ed.: *Optical Microcavities* (World Scientific, Singapore, 2004).
4) “Microresonators,” IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron., **12** (2006) No. 1.
5) Focus Issue: Physics and Applications of Microresonators, Opt. Express, **15** (2007) 17171–17457.
6) H.-J. Stöckmann: *Quantum Chaos: An Introduction* (Springer-Verlag, 1990).
7) M. C. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
8) K. Nakamura and T. Harayama: *Quantum Chaos and Quantum Dots* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
9) 別冊数理科学 量子カオスの物理と数理（サイエンス社，2000）．
10) 原山卓久，中村勝弘：量子カオス—量子ビリヤードを舞台にして—（培風館，2000）．
11) A. D. Stone: “Einstein’s unknown insight and the problem of quantizing chaos,” Phys. Today, **58** (2005) 37–43.
12) J. U. Nöckel, A. D. Stone and R. K. Chang: “Q spoiling and directionality in deformed ring cavities,” Opt. Lett., **19** (1994) 1693–1695.
13) A. Mekis, J. U. Nöckel, G. Chen, A. D. Stone and R. K. Chang: “Ray chaos and q spoiling in lasing droplets,” Phys. Rev. Lett., **75** (1995) 2682–2685.
14) J. U. Nöckel and A. D. Stone: “Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities,” Nature, **385** (1997) 45–47.
15) T. Fukushima, S. A. Biellak, Y. Sun and A. E. Siegman: “Beam propagation behavior in a quasi-stadium laser diode,” Opt. Express, **2** (1998) 21–28.
16) A. E. Siegman: “Laser beams and resonators: Beyond the 1960s,” IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron., **6** (2000) 1389–1399.
17) C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco and A. Y. Cho: “High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators,” Science, **280** (1998) 1556–1564.
18) N. B. Rex, H. E. Türeci, H. G. L. Schwefel, R. K. Chang and A. D. Stone: “Fresnel filtering in lasing emission from scarred modes of wave-chaotic optical resonators,” Phys. Rev. Lett., **88** (2002) 094102.
19) S.-B. Lee, J.-H. Lee, J.-S. Chang, H.-J. Moon, S. W. Kim and K. An: “Observation of scarred modes in asymmetrically deformed microcylinder lasers,” Phys. Rev. Lett., **88** (2002) 033903.
20) C. Gmachl, E. E. Narimanov, F. Capasso, J. N. Baillargeon and A. Y. Cho: “Kolmogorov-Arnold-Moser transition and laser action on scar modes in semiconductor diode lasers with deformed resonators,” Opt. Lett., **27** (2002) 824–826.
21) G. D. Chern, H. E. Türeci, A. D. Stone, R. K. Chang, M. Kneissl and N. M. Johnson: “Unidirectional lasing from ingan multiple-quantum-well spiral-shaped micropillars,” Appl. Phys. Lett., **83** (2003) 1710–1712.
22) S. Y. Lee, S. Rim, J. W. Ryu, T. Y. Kwon, M. Choi and C. M. Kim: “Quasiscarred resonances in a spiralshaped microcavity,” Phys. Rev. Lett., **93** (2004) 164102.
23) T. Fukushima, T. Harayama, P. Davis, P. O. Vaccaro, T. Nishimura and T. Aida: “Ring and axis mode lasing in quasi-stadium laser diodes with concentric end mirrors,” Opt. Lett., **27** (2002) 1430–1432.
24) T. Fukushima, T. Harayama, T. Miyasaka and P. O. Vaccaro: “Morphological dependence of lasing modes in two-dimensional quasi-stadium laser diodes,” J. Opt. Soc. Am. B, **21** (2004) 935–943.
25) T. Fukushima and T. Harayama: “Stadium and quasi-stadium laser diodes,” IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron., **10** (2004) 1039–1051.
26) T. Fukushima, T. Tanaka and T. Harayama: “Unidirectional beam emission from strained InGaAsP multiple-quantum-well quasi-stadium laser diodes,” Appl. Phys. Lett., **86** (2005) 171103.
27) T. Fukushima, T. Tanaka and T. Harayama: “Ring and axis mode switching in multielectrode strained InGaAsP multiple-quantum-well quasi-stadium laser diodes,” Appl. Phys. Lett., **87** (2005) 191103.
28) M. Choi, T. Tanaka, T. Fukushima and T. Harayama: “Control of directional emission in quasi-stadium microcavity laser diodes with two electrodes,” Appl. Phys. Lett., **88** (2006) 211110.
29) M. Lebental, J. S. Lauret, R. Hierle and J. Zyss: “Highly directional stadium-shaped polymer microlasers,” Appl. Phys. Lett., **88** (2006) 031108.
30) J. Wiersig: “Formation of long-lived, scarlike modes near avoided resonance crossings in optical microcavities,” Phys. Rev. Lett., **97** (2006) 253901.
31) T. Tanaka, M. Hentschel, T. Fukushima and T. Harayama: “Classical phase space revealed by coherent light,” Phys. Rev. Lett., **98** (2007) 033902.
32) W. Fang, H. Cao and G. S. Solomon: “Control of lasing in fully chaotic open microcavities by tailoring the shape

factor," Appl. Phys. Lett., **90** (2007) 081108.
33) T. Harayama, P. Davis and K. S. Ikeda: "Stable oscillations of a spatially chaotic wave function in a microstadium laser," Phys. Rev. Lett., **90** (2003) 063901.
34) T. Harayama, S. Sunada and K. S. Ikeda: "Theory of two dimensional microcavity lasers," Phys. Rev. A, **72** (2005) 013803.
35) T. Harayama, T. Fukushima, S. Sunada and K. S. Ikeda: "Asymmetric stationary lasing patterns in 2D symmetric microcavities," Phys. Rev. Lett., **91** (2003) 073903.
36) S. Sunada, T. Harayama and K. S. Ikeda: "Multimode lasing in fully chaotic cavity lasers," Phys. Rev. E, **74** (2005) 046209.
37) S. Sunada, T. Harayama and K. S. Ikeda: "Nonlinear whispering gallery modes in a microellipse cavity," Opt. Lett., **29** (2004) 718–720.
38) 原山卓久："量子カオスの根本問題と実験による新展開"，早稲田大学複雑系高等学術研究所編，複雑系叢書「複雑さと法則」(共立出版，2006) pp. 53–84.
39) H. E. Türeci, A. D. Stone and B. Collier: "Self-consistent multimode lasing theory for complex or random lasing media," Phys. Rev. A, **74** (2006) 043822.
40) H. E. Türeci, A. D. Stone and L. Ge: "Theory of the spatial structure of nonlinear lasing modes," Phys. Rev. A, **76** (2007) 013813.
41) S. L. McCall, A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. J. Pearton and R. A. Logan: "Whispering-gallery mode microdisk lasers," Appl. Phys. Lett., **60** (1992) 289–291.
42) A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. L. McCall, S. J. Pearton and W. S. Hobson: "Room-temperature lasing action in $In_{0.51}Ga_{0.49}P/In_{0.2}Ga_{0.8}As$ microcylinder laser diodes," Appl. Phys. Lett., **62** (1993) 2021–2023.
43) S.-X. Qian, J. B. Snow, H.-M. Tzeng and R. K. Chang: "Lasing droplets: Highlighting the liquid-air interface by laser emission," Science, **231** (1986) 486–488.
44) S. M. Spillane, T. J. Kippenberg and K. J. Vahala: "Ultralow-threshold Raman laser using a spherical dielectric microcavity," Nature, **415** (202) 621–623.
45) M. Kuwata-Gonokami and K. Takeda: "Polymer whispering gallery mode lasers," Opt. Mater., **9** (1998) 12–17.
46) T. Harayama, P. Davis and K. S. Ikeda: "Nonlinear whispering gallery modes," Phys. Rev. Lett., **82** (1999) 3803–3806.
47) T. Baba and D. Sano: "Low-threshold lasing and Purcell effect in microdisk lasers at room temperature," IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron., **9** (2003) 1340–1346.
48) Lord Kelvin: "Nineteenth century clouds over the dynamical theorem of heat and light," Phil. Mag., Ser. 6, **2**, No. 7 (1901) 1–40.
49) 久保　泉："エルゴード伝説"，数学セミナー増刊「現代数学のあゆみ」(日本評論社，1986) pp. 117–142.
50) 戸田盛和，久保亮五編：岩波講座現代物理学の基礎「統計物理学」(岩波書店，1972).
51) 相澤洋二：キーポイント熱・統計力学 (岩波書店，1996).
52) Y. G. Sinai: "Dynamical systems with elastic reflections," Russ. Math. Surv., **25** (1970) 137–189.
53) L. A. Bunimovich: "On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards," Commun. Math. Phys., **65** (1979) 295–312.
54) H.-J. Stöckmann and J. Stein: "Quantum chaos in billiards studied by microwave absorption," Phys. Rev. Lett., **64** (1990) 2215–2218.
55) C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins and A. C. Gossard: "Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures," Phys. Rev. Lett., **69** (1992) 506–509.
56) E. J. Heller, M. F. Crommie, C. P. Lutz and D. M. Eigler: "Scattering and absorption of surface electron waves in quantum corrals," Nature, **369** (1994) 464–466.
57) H. Haken and H. Sauermann: "Nonlinear interactions of laser modes," Z. Phys., **173** (1963) 261.
58) H. E. Türeci, H. G. L. Schwefel, A. D. Stone and E. E. Narimanov: "Gaussian optical approach to stable periodic orbit resonances of partially chaotic dielectric microcavities," Opt. Express, **10** (2002) 752–776.
59) T. Fukushima, S. Shinohara and T. Harayama: "Light beam output from diamond-shaped total-internal reflection modes by using intracavity air gaps," Opt. Express, **15** (2007) 17392–17400.
60) S. Sunada and T. Harayama: "Sagnac effect in resonant microcavities," Phys. Rev. A, **74** (2006) 021801.
61) S. Sunada and T. Harayama: "Design of resonant microcavities: Application to optical gyroscopes," Opt. Express, **15** (2007) 16245–16254.
62) T. Harayama, S. Sunada and T. Miyasaka: "Wave chaos in rotating optical cavities," Phys. Rev. E, **76** (2007) 016212.
63) G. Sagnac: "L'ether lumineux demontre par l'effet du vent relatif d'ether dans un interferometre en rotation uniforme," C. R. Acad. Sci., **157** (1913) 708–710.
64) G. Sagnac: "Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant," C. R. Acad. Sci., **157** (1913) 1410–1413.
65) L. N. Menegozzi and W. E. Lamb: "Theory of a ring laser," Phys. Rev. A, 8 (1973) 2103–2125.
66) F. Aronowitz: *Laser Applications*, ed. M. Ross (Academic Press, New York, 1971) Vol. 1, pp. 133–200.
67) W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, V. E. Sanders, W. Schleich and M. O. Scully: "The ring laser gyro," Rev. Mod. Phys., **57** (1985) 61–104.
68) K. Inagaki, S. Tamura, H. Noto and T. Harayama: "Sagnac beat signals observed in semiconductor fiber-optic ring laser gyroscope," *18th Intl. Conf. on Optical Fiber Sensors*, ME7 (Cancun, 2006).
69) T. Harayama, S. Sunada, S. Tamura, K. Inagaki and H. Noto: "Nonlinear Sagnac effect for ring laser gyroscopes," *18th Intl. Conf. on Optical Fiber Sensors*, TuE63 (Cancun, 2006).

(2007 年 11 月 5 日受理)