

波動カオスのレーザー発振

砂田 哲*・篠原 晋*・池田 研介**

Laser Oscillation of Wave Chaotic Modes

Satoshi SUNADA*, Susumu SHINOHARA* and Kensuke S. IKEDA**

Laser oscillation of wave-chaotic modes in a typical ergodic 2D-microdisk cavity is reviewed theoretically. How the ergodicity of ray dynamics inside the cavity and the invariant dynamical structures underlying chaotic ray dynamics are reflected in the natures of nonlinear oscillation and emission pattern is discussed.

Key words: wave chaos, microcavities, laser physics, spatio-temporal dynamics

レーザーは管楽器に非常によく似ている。前者は光、後者は音を放出するという違いはあるにせよ、いずれも前者はレーザー共振器、後者は管体という一次元的な共鳴器を備えていて、共鳴器がその境界条件によって選択した固有振動状態をレーザー媒質や吹鳴口のリード等の光源あるいは音源によって励起して発振させ、その一部を出力としてとりだす装置である。レーザーにせよ管楽器にせよ一次元共振器を備えている系では、固有振動はその長さで定まる基本周波数の整数倍をもつ高調波という一大特徴がある。幾何光学的にいえば、一次元共振器内の光線の運動は共振器境界による反射を伴う単純な一次元自由運動である。対応する波動光学的状態は一定波数で単一方向に進行する進行波であり、境界からの反射波と重なって形成された定在波が固有状態である。

しかし、もし共振器が二次元的広がりをもてば、共振器境界で反射される光線の運動の全過程は一次元共振器の場合とは異なり、非常に複雑なものになりうる。二次元共振器内の光線は全反射条件を守る限り、共振器境界で入射角=反射角という条件を満たしつつ反射されながら進行する。光線の運動は座標2成分、波数ベクトル2成分の四次元運動空間の軌跡になるが、光線運動の〈速さ〉すなわち波数ベクトルの大きさが保存されるので、運動空間の次元

は $4-1=3$ 次元になる。円盤のような対称性のよい共振器では〈速さ〉に加えて〈角運動量〉を保存するので、1本の光線が塗りつぶす領域以下、光線集合とよぼうの次元はさらに減って $4-2=2$ 次元になり、光線運動は非常に単純になる。実際、運動は動径方向と半径方向の成分に分離され、それぞれの方向の一次元運動の組み合わせに帰着する。数学的にいえば、光線運動が積分できてしまう。そのような共振器を可積分共振器とよぼう。この拘束のために、光線がひとたび全反射条件を満たせば、エバネセント光によるごくわずかな洩れを無視する限り永遠に閉じ込められる。三次元運動空間は二次元の光線集合でパウムクーヘンのように仕切られ、対応する波動光学的な固有振動状態は異なる光線集合上に棲み分けている。円盤型共振器で発振するwhispering galleryモードは、そのようなクラスの固有状態に属している。特に角速度が大きい振動状態は、“遠心力”のために境界にへばりつくように局在してほとんど一次的に運動し、対応する固有状態は一次元の進行波といってよい。

しかしながら、一般の形状の共振器では〈速さ〉以外の保存量がなく、1本の光線が塗りつぶす光線集合は三次元に広がり、光線の運動は積分可能な運動とは非常に異なる様相を示す。このとき、一般に光線の軌跡はカオス的、す

* ATR 波動工学研究所非線形科学研究室 (〒619-0288 けいはんな学研都市光台2-2-2) E-mail: sunada@atr.jp

** 立命館大学理工学部 (〒525-0577 草津市野路東1-1-1)

なわち、初期条件のごくわずかな変化に対し不安定で予測困難な挙動を示しうる。光線カオスが発生する共振器をカオスの共振器あるいは非可積分共振器とよぶ。光線カオスが発生する運動空間の固有状態は、光線の挙動を反映して複雑な干渉パターンをもつため波動カオスとよばれる。特にエルゴード的、すなわち、1本の光線が運動空間の全域を覆いつくす理想的なカオス光線運動が起こるような共振器では、運動の過程で必ず全反射条件が破れるので光線は洩れだし、固有状態の寿命は有限になって、共振器の境界を越えて波動が広がる。寿命のある固有状態は共鳴状態とよばれる。また、拘束がないため固有状態は局在せず、共振器内に一面に分布する。

このように共振器の次元や形状は、発振を担う固有振動状態（共鳴状態）に著しく影響する。一方、共振器内に励起される線形波動は、完全系を張る固有振動の重ね合わせで数学的に表現される。しかし、固有状態は単なる数学的表現手段に過ぎず、各固有状態があたかも区別できる物理的実体として発振に個別に関与する保証はない。楽器の例に戻れば、楽器特有の音は決して単一の固有振動で形成されるわけではなく、多数の高調定在波成分＝固有振動が一定の安定な相対位相、振幅をもって励起され、形成されている。すなわち、固有状態は音源との結合体様に依存する非線形性によって相互作用し、あたかも貼り合わされたように発振するのである。

それでは、上に述べたような複雑な固有状態をもつカオスの共振器の中にレーザー媒質を光源として挿入したとき、固有状態である波動カオス状態はどのように発振するのだろうか。はたして、不安定な光線運動を背景にもつ波動カオス状態は安定に発振するのだろうか。それとも発振状態そのものが、流体の乱流状態のような時間空間的に複雑に変動するカオス状態になってしまうのだろうか。実現した発振状態からの輻射には背景にある光線カオスがどのように刻印されているのだろうか。これらの疑問に対する最近の研究成果を報告する。

1. 発振ダイナミクスを記述する基礎方程式

まず、レーザー発振の基礎方程式を説明する。レーザーは光学共振器と発光源であるレーザー媒質からなる。外部から印加された電流などによるポンピングによって、励起準位に上げられたレーザー媒質の電子が基底状態に戻る過程で光を放出する。それが共振器内に閉じ込められ、固有振動（正しくは共鳴状態）を励起する形で媒質にフィードバックされ誘導放出を繰り返して増幅され強いレーザー光になる。一方、レーザー媒質は増幅を抑制し最終的に定常

発振が起こる。

十分薄い二次元光学共振器の場合を考えよう。また、光源となるレーザー媒質のモデルとして励起、基底状態からなる二準位原子模型を想定する。二準位系のダイナミクスは電場 E によって駆動される巨視的な分極 ρ と、分布反転 W を力学変数とするオプティカル-ブロッホ方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \gamma_{\perp} \rho - i\omega_0 \rho - i\kappa W E \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \gamma_{\parallel} (W - W_{\infty}) - 2i\kappa E (\rho - \rho^*) \quad (2)$$

で表される。 γ_{\perp} , γ_{\parallel} は分極、分布反転の緩和率（横、縦緩和率）、 κ は双極子能率である。電場が存在しなければ分布反転は W_{∞} に緩和し、それはポンピングの度合を表す。 ω_0 は二準位系の遷移周波数、すなわち光源の周波数を表す。一方、共振器内の光場（電場）の運動は古典的なマクスウェル方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \frac{c^2}{n^2(x, y)} \nabla_{xy}^2 E - \theta(x, y) \left[2\beta \frac{\partial E}{\partial t} - C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \rho \quad (3)$$

で表される。ここに $\theta(x, y)$ は共振器内で1、外で0の関数である。屈折率分布は共振器内で大きい値 (n_{in})、外で小さい値 (n_{out}) をとるので、任意の場所の屈折率は $n(x, y) = n_{in}\theta(x, y) + (1 - \theta(x, y))n_{out}$ で与えられる。この屈折率の差を利用して光を閉じ込める。 β は共振器内の吸収項、 C は κ と媒質密度の積で決まる結合定数である。マクスウェル・ブロッホ (MB) 系のセットがレーザーの動力学を記述する基礎方程式である¹⁾。

2. 定常発振問題、発振条件、動的シミュレーション

まず、MB方程式から予想される定常解を考えてみよう。共振器内の電場がある単一周波数 ω で $E(x, y) = e^{-i\omega t} E_s(x, y)$ のように振動していると仮定する。同様な変数分離を分極 ρ に対しても仮定すれば、ブロッホ方程式から分極が $E_s(x, y)$ で表され、MB方程式は閉じた $E_s(x, y)$ のみの偏微分方程式になる。

$$\left(\nabla_{xy}^2 + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_s(x, y) = \left[i\xi \frac{\omega^2}{c^2} L(\omega) \left(1 + i \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_{\perp}} \right) \frac{W_{\infty}}{1 + \xi_{\omega} |E_s|^2} - 2i\beta\omega \right] \theta(x, y) E_s(x, y) \quad (4)$$

ここで $\xi \equiv C\kappa$ 、さらに $L(\omega)$ は光源周波数を中心にもつローレンツ関数型の利得関数である。この方程式の右辺の第1項がレーザー媒質からの利得と飽和効果を表している。この偏微分方程式を $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ で輻射型境界条件 $E(x, y) \sim e^{ik\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-i\omega t}$ を満たすことを要請して解けば、

ある一定の単一周波数 ω をもつ定常発振解が得られる。発振に対する共振器形状の影響を考えるために、まず、レーザー媒質の効果を無視してみよう。すると、左辺=0、すなわち

$$\left(\nabla_{xy}^2 + n^2(x, y) \frac{\omega^2}{c^2}\right) \psi(x, y) = 0 \quad (5)$$

なるヘルムホルツ方程式が得られ、その輻射境界条件を満たす解 $\psi = \psi_j(x, y)$ は、共振器の境界条件で決定される固有状態を表す。ところが、その固有周波数 ω_j は虚部が負の複素数になって解は減衰してしまう。レーザー媒質がない共振器からは、光が外部に向かって輻射されるだけなので、 ω_j に負の虚部、すなわち寿命があるのは当然である。この意味でこれらの状態は通常の固有状態とは異なり、共鳴状態（あるいは共鳴モード）ともよばれている。共鳴状態の遠方波数 $k = n_{\text{out}}\omega/c$ も複素数になり振幅は発散する。この意味で共鳴状態は物理的な解ではない。（複素回転という数学的手法を使うと、共鳴状態は直交基底の意味をもつ。）しかし、媒質を考慮した式(4)の固有値問題を考えると、それは E_s の振幅と ω の連立方程式になって、周波数 $\omega = \omega_j$ は実数になり、物理的な発振解を得ることができる²⁾。

式(4)で表される定常発振問題は非線形の境界値問題であり、それを解くのは、一般形状の共振器に対して困難である。式(4)の右辺の媒質部分を線形近似した線形固有値問題を考え（つまり右辺 $|E_s|^2$ の項を無視）、その解が負の寿命、つまり正の成長率 $\text{Im}\omega_j > 0$ をもつか否かで、発振可能なモードを推定するほうがはるかに簡単で物理的でもある。上述の共鳴モード ψ_j を、その第0近似解として使うことができるであろう。線形化した式(4)に ψ_j を代入すると、 ω_j の共鳴状態（媒質項がなければ $\text{Im}\omega_j < 0$ ）に対応するモードが発振し成長するための条件 $\text{Im}\omega_j > 0$ は、次のようになる¹⁾。

$$\frac{\xi}{2} \frac{\text{Re}\omega_j}{c^2} L(\text{Re}\omega_j) W_\infty > -\text{Im}\omega_j + \beta \quad (6)$$

左辺はレーザー媒質から与えられる利得を表し、共鳴周波数の実部 $\text{Re}\omega_j$ が遷移周波数 ω_0 に一致するとき最大となる。右辺はモードの洩れによる減衰率と内部損失の和で、上の式は利得が損失を上回ることを意味する。

しかし、上記発振状態の候補が本当に安定して発振できるかどうかはダイナミクスを調べないとわからない。特に、ポンピングパワーを増加させた場合に多数のモードが同時に発振条件を満たしうるので、実際に、いかなる解が実現するか定常発振問題の範囲で答えることはできない。そこでMB方程式に戻って、その時間発展を調べる必要

がある、しかしMBモデルでは、非常に速く振動する搬送波部分を含めて計算しなければならないため、精度を確保するには長時間のシミュレーションが必要となる。そこで時間に対する搬送波部分を落とし、十分にゆっくりと変化する包絡線部分に注目する近似を行う（slowly varying envelope approximation, SVEA)¹⁾。するとマクスウェル方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{E} = \frac{i}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2(x, y)}{n_{\text{in}}^2} \right) \tilde{E} - \alpha_L \tilde{E} + C\tilde{\rho} \quad (7)$$

となってシュレーディンガー型方程式で近似される。ここに \tilde{E} と $\tilde{\rho}$ は電場と分極の包絡線部であり、もとの変数と $E = \tilde{E}e^{-i\omega t}$ 、 $\rho = -i\tilde{\rho}e^{-i\omega t}$ で結ばれる。これとSVEA近似されたプロッホ方程式のセットはシュレーディンガー・プロッホ (SB) 方程式とよばれている。SB方程式は、symplectic integrator 法³⁾を使うと効率的なシミュレーションが可能である。実際、レーザー媒質を考慮した最初のマイクロディスク共振器の非線形シミュレーションはこのモデルを使って行われた⁴⁻⁶⁾。しかし、屈折率差が大きい場合には共振器の共鳴周波数の分布が変化し、非現実的な束縛状態も共振器のモードとして表れることもあり取り扱いに注意が必要である。広い領域での制御パラメータに対し、このモデルによって発振現象の定性的動向を把握したうえで、オリジナルなMB方程式に戻って結果の確認を行うことが望ましい。MB方程式の数値積分はFDTD法によって行っている⁷⁾。

3. 波動カオスの定常発振

ここではスタジアム形状の共振器を選び、その数値実験結果を示す。スタジアム型共振器とは、2つの半円と2本の直線からなる形状の共振器であり、この共振器内の光線の軌跡はほとんどすべての初期条件に対してカオス的でエルゴード性をもつことが厳密に証明されている⁸⁾。実際、スタジアムビリヤードはカオスを研究するための標準的なモデルのひとつとなっている。

SB方程式(7)から示されるスタジアム型共振器の共鳴周波数分布を図1に示す。図中の◎と○で示す共鳴モードの波動関数は図2に示した。これらの状態はスタジアム型共振器の典型的な“波動カオス”状態である。例えば、利得の中心が◎で示したある共鳴周波数近傍にあり、ポンピングパワー W_∞ が小さい場合、図中の◎のみがSB方程式から得られる発振条件（利得 > 損失）を満足する。この例でSB方程式を直接数値積分して、波動カオスの共鳴モードが定常的な発振状態になるかどうかを確かめてみる。初期波束としてはガウシアン波束を想定した。ポンピング

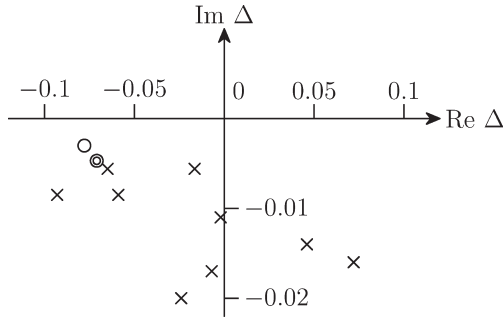
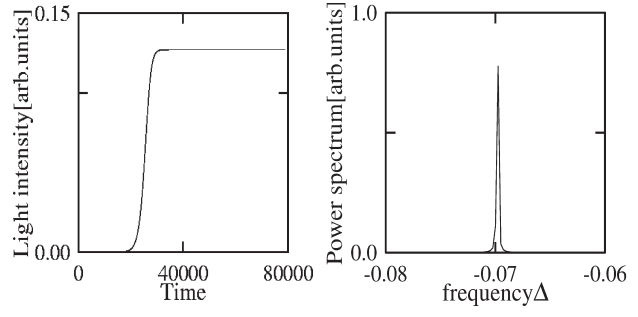
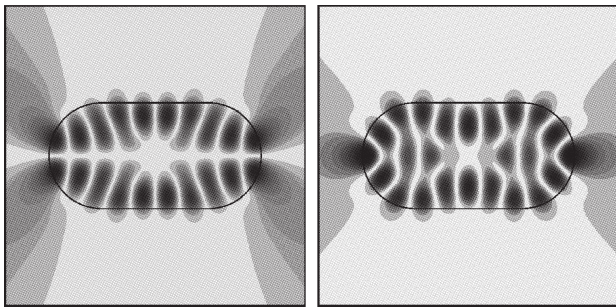


図1 スタジアム型共振器の共鳴周波数 Δ の分布. \odot と \circ で示す周波数をもつモードの波動関数は図2 (a) と (b) に示している. \times はその他の共鳴モードに対応する周波数を表している. ここに, $\Delta = (\omega - \omega_s) / \omega_s$ は二準位媒質の遷移周波数に近いある ω_s を使って定義された無次元周波数.



(a) (b)

図3 (a) 共振器内部の光強度の時間発展. ポンピングパワー $W_0 = 1.7 \times 10^{-4}$ であり, 図1中の \odot の共鳴モードのみが発振条件を満たしている. (b) 定常領域後の光スペクトル.



(a) (b)

図2 (a) と (b) は, それぞれ, 図1の \odot と \circ の共鳴周波数をもつモードの波動関数.

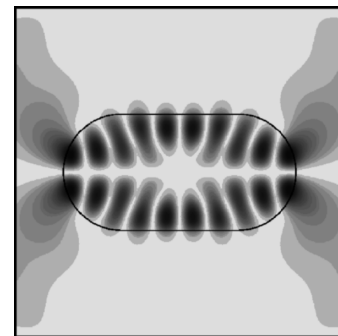


図4 最終定常発振状態.

パワーが増加して, 図中の諸共鳴状態の中で \odot のみが発振条件式(6)を満足する場合, 共振器内の光強度は指数関数的に増加していき, 最終的にある値に収束する(図3(a)). この定常領域における光スペクトルは図3(b)に示すように, \odot の共鳴モードの周波数に対応する単一の周波数を与えることになる. 最終的な発振パターンは図4に示すように, 共鳴モードの波動関数(図2(a))によく対応していることがわかる. これらの結果から, カオス的で不安定な光線運動を示すカオス的共振器といえども, その共鳴モードは安定に定常発振することがわかる⁹⁾. スタジアム型共振器レーザーの実験に関する詳細については, 本特集号の福嶋氏の記事を参照されたい.

4. モード間同期現象と非対称な定常発振状態の形成

2つの共鳴モードが発振条件を満たす場合には, どのような発振がみられるだろうか⁹⁾. 共振器内には2つの非線

形振動子が発生したといえる. 周波数が近い2つの非線形振動子が発振して相互作用すると, 一般に同期現象が生じることが知られている. 同期現象とは, 周波数が整数比(一般的には有理数比)に近い2つ(以上)の自励発振した振動子が相互作用するとき, お互いの周波数が変化しあって整数比(有理数比)に固定されてしまう現象で, 広い意味の非線形共鳴現象とも考えられる^{*1)}. 例えば, ゴムで結ばれたわずかに異なる振動数をもつメトロノーム, 同じ壁にかけられた振り時計等々で同期現象が生じることが知られている. 一次元共振器レーザーと異なり, 二次元共振器レーザーに特徴的なことは, その共鳴状態の周波数が等間隔に分布しないことである. 例えば, 図1に示すように, 近い共鳴周波数をもつ2つ以上の共鳴モードが同時に発振条件を満たすことは頻りに起こりうる. これらのモードの間には同期現象が発生し, 2つの直交していた共鳴モードは融合しあって1つのモードを自律的に形成し新たなモードとして発振する. このような効果はレーザー媒質を考慮

*1 非線形共鳴とは, エネルギーを保存するハミルトン系で広くみられるきわめて重要な非線形現象である. 系の振動周期が外力の周期の有理数比にあるとき, 共鳴が起こって運動が大きく乱されたり(例:木星に乱される小惑星), お互いを閉じ込めあったりする(例:周期比1対2の海王星と冥王星). レーザーのような非平衡散逸系では非線形共鳴が同期に変化する.

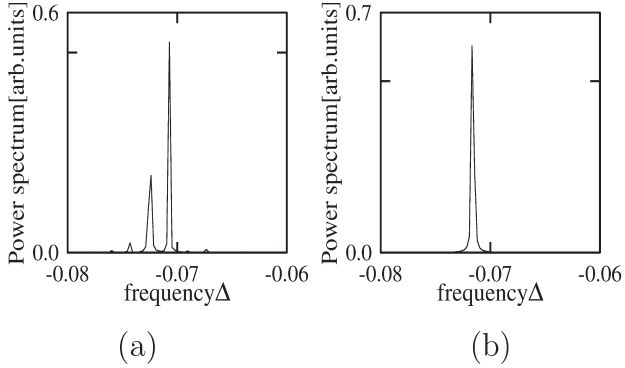


図5 (a) ポンピングパワー $W_{\infty}=35 \times 10^{-4}$ 時の光スペクトル. (b) $W_{\infty}=100 \times 10^{-4}$ 時の光スペクトル.

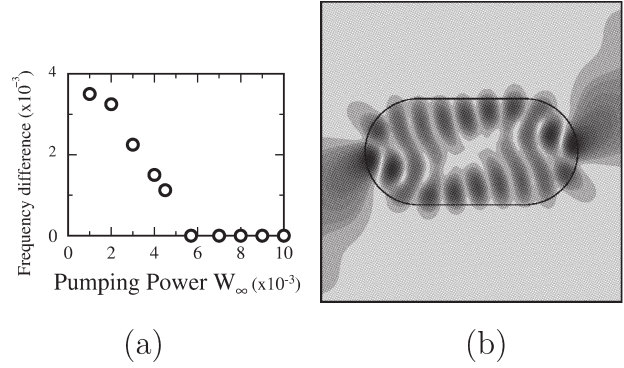


図6 (a) 図2 (a) と (b) に対応する2つの発振モード間の周波数差 vs. ポンピングパワー. (b) 同期現象が生じた場合 ($W_{\infty}=100 \times 10^{-4}$ 時) の最終定常発振状態.

しない、従来の線形理論では予期されなかった現象である。

特に形に幾何学的な対称性をもつ共振器においては、次のように興味深い同期現象が観察される。以下、それをスタジアム型共振器を例にして説明する。スタジアムは長軸と短軸に関して対称であるので、その共鳴状態の波動関数は長軸と短軸に関してそれぞれ奇または偶となる合計4つのパリティをもつ。例えば、図2 (a) に示す波動関数は長軸と短軸に関して節があるので奇パリティである。一方で、図2 (b) に示す波動関数は長軸と短軸に関して偶パリティをもつ。しかも、これらの共鳴モードはほとんど縮退し、非常に近い共鳴周波数をもっている。前章での数値計算と同じ設定パラメータのもとでポンピングパワー W_{∞} をさらに増加させてみる。すると、図2 (a) に示す奇パリティの共鳴モードのほかに、それに近い周波数をもつ偶パリティのモード (図2 (b)) も発振条件を満足するため同時発振が始まる。ポンピングパワーが十分に弱ければ、発振モード間の非線形相互作用は弱く、お互いが固有の周波数で発振する。異なるパリティのモードが重なり合い干渉しているので、ある対称軸に関して交互に、そして周期的に光を放射する。擬似スタジアムとよばれる他の共振器では、実際に実験的にそのような現象が観測されている¹⁰⁾。

このような発振状態は、一見、2つの共鳴状態を任意の比率で重ね合わせて作られた線形重ね合わせ状態が差周波でうなっているように見えるが、決してそうではなく、おのおのの成分比や相対位相が定まった状態であり、系が緩和した結果生まれた状態であることを強調しておきたい (数学的に正確に言えば、この場合の発振状態は二次元トラスアトラクターである)。ポンピングパワーをさらに増加させると、同期に向かって、発振状態は次のように変化してゆく。まず図5 (a) に示すように、2モードの周波

数を表す2つの大きなピークのほかに、差周波の整数倍の高調波成分がみられる。差周波数はポンピングの増加とともに減少し、ついに0になる (図6 (a))。その直前には、無数の差周波の高調波成分が現れる。この過程を時間領域でみると、2モードをある位相で重ね合わせた状態、それと π だけ異なる位相で重ね合わせた状態の2状態を周期的にスイッチする振る舞いが観測され、差周波数が0となることに対応してスイッチ周期が無限になって、どちらかの状態に凍結する (この2状態は双安定)。これが同期状態であり、定常的な1周波数成分の発振となり、光スペクトルには1つのピークしかみられない (図5 (b))。

同期状態は、異なるパリティをもつ共鳴モードの重ね合わせでできているので、干渉の結果、空間的に非対称な発振パターンが形成される (図6 (b))。図に示した同期状態では右上と左下の方向に光が定期的放出している。それと双安定なペアをなす状態は左上と右下方向に光を放射するような状態であり、状態の選択は初期条件のコントロールによって可能である。

同期現象によって自発的に対称性が破れ、非対称な発振パターンが形成される現象は対称性のある二次元共振器ではきわめて一般的に起こる。同期現象による非対称発振パターン形成に関する実験の詳細およびこの現象の工学分野への応用については文献11~13を参照されたい。

5. カオス的共振器における多モード発振¹⁴⁾

共鳴周波数の間隔はおおよそ面積に反比例して小さくなるので共振器サイズが大きくなると、利得幅内に多くのモードが集まることになる。そのため多くのモードが発振に関与する。一方で、すでに述べたように、カオス的共振器における共鳴状態は共振器のエルゴード性を反映して共鳴器内の全領域に広がってしまう。このために、発振条件を

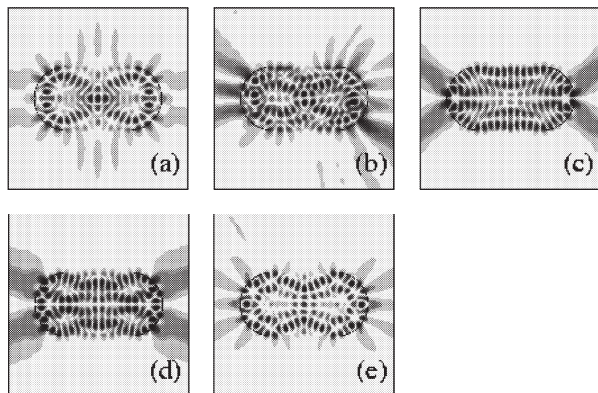
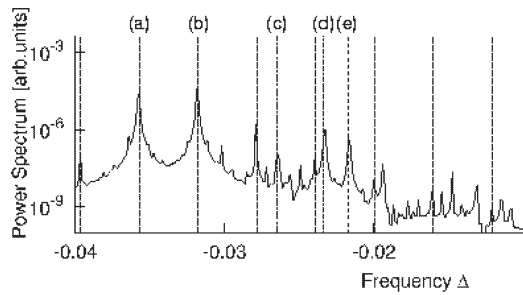


図7 ポンピングパワー $W_{\infty}=1.6 \times 10^{-3}$ のときの発振スペクトルとそのスペクトル内のピーク (a)~(e) に対応する発振成分の空間パターン (a)~(e)。

満たす多数のモードは棲み分け不可能になって激しい競合が起こる。一方、エルゴード性のためにすべての光線軌道は境界での全反射条件を破って、いずれ共振器外部に出てしまうので、エルゴード共振器による閉じ込めは曖昧になる傾向が強い。

スタジアム型共振器における多モード発振のスペクトルの例を図7に示す。利得中心は $\Delta_0 = -0.03$ と設定している。図からわかるように、スペクトルには非常に多数のピークがみられるが、それぞれのピークは共鳴モードの周波数に対応するもの(発振成分)と、それらの差周波の高調波成分に分類することが可能である。図7中の発振成分(a)~(e)の空間パターンをその下側に示す。発振成分の中には共鳴モードの性質を継承しているものもあるが、発振成分(b)の空間パターンのように同期現象によって共鳴モードとの対応関係がすでに崩れているものもある。ポンピングパワーを増加すると、発振成分と共鳴モード間の対応関係はさらに悪くなる。図8に、多モード発振時の光スペクトル内におけるピーク位置に関する W_{∞} 依存性を示した。図中のラベル(a)~(e)は図7における発振成分のピークにそれぞれ対応している。この図から、2種類の周波数シフトが発生していることが読み取れる。ひとつは発振成分(a)と(b)に生じている引き込み現象であり、もうひとつは発振成分(c),(d),(e)に生じている

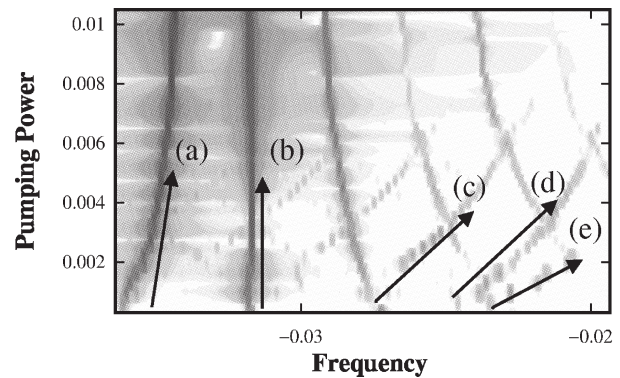


図8 発振スペクトル内のピーク位置の W_{∞} 依存性について。図中のピーク(a)~(e)は図7に示される発振成分に対応する。

“押し出し”現象である。図からわかるように、発振成分(c),(d),(e)の周波数は利得中心 $\Delta_0 = -0.03$ から離れる方向にシフトしている。発振成分(e)は利得中心から押し出され、(a)と(b)の相互作用から生じた高調波成分に近づき、その高調波成分と同期現象を起こして1つのピークへと変化する。しかし、(a)と(b)の相互作用から生じた高調波成分のピークは(a)と(b)間の引き込みのため利得中心へ向かいシフトしていくので、(e)はこれらに引き込まれ、利得中心に向かいシフトしていく。一方で、(c)と(d)は同期現象を起こすことなく利得中心から離れる方向へシフトしていくため、発振に必要な利得を失う。そのため、押し出された発振成分に対応するピークの強度は減少し最後に消えてしまう。このように、発振する成分は強い選択を受け、最終的に発振状態を形成する成分は、もはや線形共鳴状態とは対応していない。波動カオスマードの柔軟な周波数シフトと激しい競合はこの章のはじめに述べたように、エルゴード性由来する共振器閉じ込めの曖昧さと、共鳴状態の棲み分け不能に起因する激しい競合によると考えられる。むしろ、統合状態へと向かう中間ポンピング領域では、お互いに簡単な整数比にならないたくさんの周波数成分が現れる多モード発振の状態が存在することはいうまでもない。

また、ここでは誌面の都合上紹介しなかったが、高ポンピングパワー領域では、発振状態が多重安定となる現象もみられる。その中には、上記で述べた多次元トーラス的アトラクターやリミットサイクルと異なり、カオス的な振る舞いを示す状態も存在し、初期条件を変えれば、発振可能となる。二次元共振器レーザーを含め、光の時空カオス状態への遷移過程に関してまだ明らかにされていない問題が多く残されている。

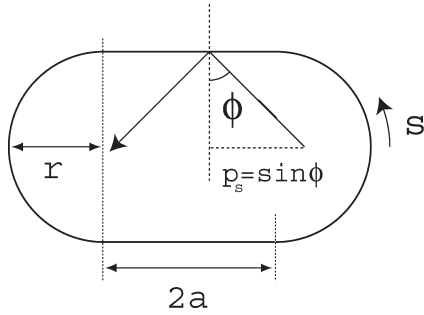


図9 スタジアム型共振器とバーコフ座標.

6. 光線カオスと波動カオス

以上では、SB 方程式を用いて、波動カオスの発振について考えてきた。本章では、光線の運動という幾何光学的視点に戻って、光線カオスの性質を掘り下げ、光線の運動がいかに波動カオスに刻印されているかを論ずる。

まず、スタジアム型共振器における光線カオスのダイナミクスを少し詳しく書いておく。序論で述べたように、この共振器では、波数の大きさ以外の保存量はない。このため光線のダイナミクスは、予測困難なカオス性を示すが、それを記述するのに、バーコフ座標とよばれる二次元座標がしばしば用いられる¹⁵⁾。バーコフ座標とは、共振器壁での光線の状態を表す2つの変数 s , p_s の組みで、図9に示すように、変数 s は境界壁に沿った座標を表し、変数 p_s は入射速度の境界接線成分を表す（ただし光速を1としている）。容易にわかるように、この2つの変数の値は光線が壁にぶつかるたびに次々一意的に定まる。幾何光学と古典力学とのアナロジーでいうならば、 s と p_s は正準共役な変数の組みをなし、 s と p_s で張られる空間を位相空間とみなすことができる。光線が壁にぶつかるたびにに対応する座標 (s, p_s) をプロットしていくと、光線運動の状態変化を表す点列が得られる。

スタジアム型共振器の場合、得られる点列は、図10(a)のように位相空間一様にばらまかれたものとなる。これは、波数一定という唯一の拘束から許される状態を一様にめぐるエルゴード的なカオス運動の特性を反映している。光線の時間発展に応じて、点列が一様にばらまかれていく過程は、一見、でたらめであるかのように見える。しかし、光線ダイナミクスは、決定論的規則によって生成されており、あたかも「でたらめ」に見える運動を生成する機構が位相空間には埋め込まれているのである。その機構は、運動空間全体をあたかもパイ生地を作るかのように「引き伸ばし」て「折り畳む」。時間が経過し、何度もその操作が繰り返されると、最初隣接していた2点は隣接していた記憶を失い、それぞれに対応する光線はあたかも相関

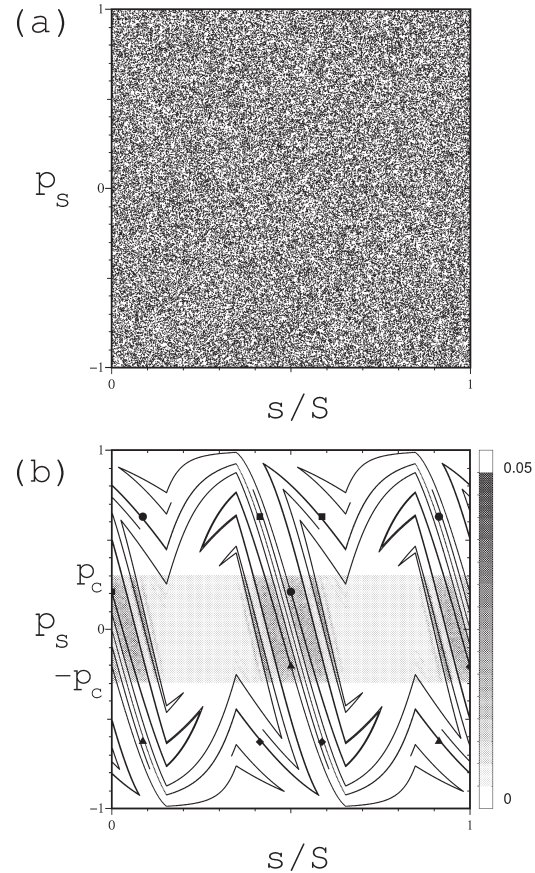


図10 (a) スタジアム型共振器の光線ダイナミクス。バーコフ座標による位相空間において1つのカオス運動を描画したものである。座標 s (横軸) は共振器壁の全長 S で規格化してある。(b) 周期3の周期運動の不安定集合 W_u と分布 $P_r(s, p_s)$ 。●, ■, ▲, ◆ は異なる周期3の周期運動を表す。 $P_r(s, p_s)$ の $|p| \leq p_c$ 領域の拡大を図12(a)に示す。

のない軌跡をたどる。これが〈不安定〉な光線カオスの発生機構である。カオスである場合には、いくらでも長い周期をもつ無数の不安定な周期運動（バーコフ座標上では周回する点列にみえる）が存在しており、しかも周期運動に向かう初期点の集合（安定集合 W_s ）と、それから離れる点の集合—より正確に言えば、時間反転すると周期運動に向かう初期点集合（不安定集合 W_u ）—をもつ。例として、周期3の周期運動の不安定集合 W_u を図10(b)に示した。 W_s と W_u は交差して、引き伸ばし・折り畳み機構をつくり出し、複雑な交差集合上にカオスが生まれるのである。さらに、ある周期運動の W_u は異なる周期運動の W_s とも交わり、それを使って、カオス運動はさまざまな周期運動を遍歴する。この意味で、稠密に存在する周期運動はカオス運動の骨格を形成する。スタジアム型共振器の場合、カオス的エルゴード運動のために光線はいずれ全反射条件を破って共振器外へ放出されるので、光の閉じ込め時間は有限である。したがって、短時間のダイナミクスを

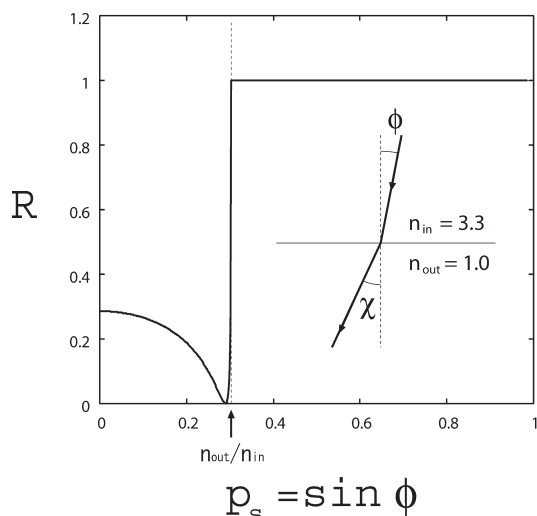


図11 反射率 R の入射速度接線成分 $p_s = \sin \phi$ 依存 ($n_{in} = 3.3$, $n_{out} = 1.0$, TE 波の場合). 挿入図はスネルの法則 $n_{in} \sin \phi = n_{out} \sin \chi$.

支配する周期の小さな周期運動が重要になる。その様相を概観しよう。屈折率が変化する境界面での光線強度の反射率 R は、入射角に依存し、その依存はフレネルの公式によって表される¹⁶⁾。入射角を ϕ として、反射率 R の入射速度接線成分 $p_s = \sin \phi$ 依存を図11に示した。 $|p_s|$ が臨界値 $p_c = n_{out}/n_{in}$ よりも大きいと全反射を起こし、反射率 $R=1$ となる。一方、境界面に鋭角で入射し、 $|p_s| < p_c$ が満たされる場合は、一部の光線強度のみが反射される。これは、位相空間において、光が透過する開いた「窓」を設置することに相当し、この窓は $|p_s| < p_c$ で定められる領域になる。カオス運動は、位相空間を一様に彷徨するが、この窓領域に入ると、光線強度の大半が共振器外へ放射される*2。

初期に同一の光線強度をもつ光線アンサンブルを位相空間一面にばらまき、開いた窓領域からどのようにして光が放射されるか調べてみることにする。光のエネルギーは放射される一方なので、窓領域でのエネルギー流束分布 $\tilde{P}_r(s, p_s, t)$ は時間的に指数関数的に減衰し、漸近的に $\tilde{P}_r(s, p_s, t) = P_r(s, p_s) e^{-t/\tau}$ のように表される。数値シミュレーションで得られた漸近分布の相空間分布因子 $P_r(s, p_s)$ を図12(a)に示した。分布 $P_r(s, p_s)$ は、共振器壁からの光の放射パターン、すなわち近視野の様子を記述していると解することができる。図10(b)と図12(a)とを見比べると、分布 $P_r(s, p_s)$ の構造は、周期3の周期運動の不安定集合 W_u によって骨組みが与えられていることがわかる。分布 $P_r(s, p_s)$ の形成において重要なのは、位相空間において、全反射領域 $|p| > p_c$ から開放窓領域 $|p| < p_c$ への

*2 正確には、入射する光線強度を ϵ とおくと、反射率を $T=1-R$ として、 $T\epsilon$ だけの強度が放射される。図11からわかるように、 $|p_s| < p_c$ では $T \approx 0.7 \sim 1.0$ なので、光線強度の大半が共振器外へ放射されることになる。

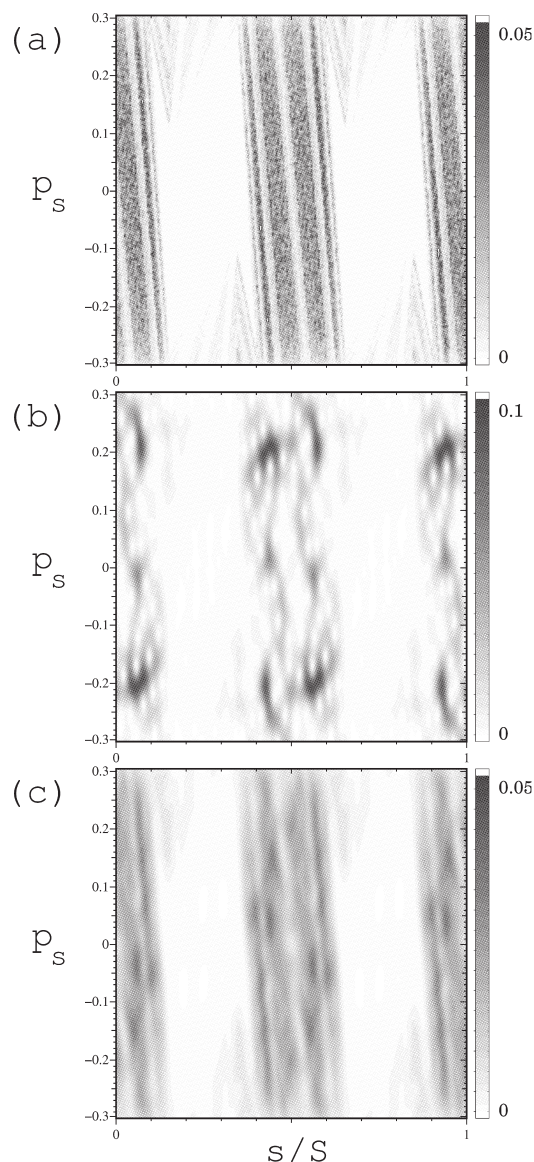


図12 スタジアム型共振器壁でのエネルギー流束分布。(a) 光線の記述による分布 $P_r(s, p_s)$, (b) 単一の低損失モード(波動的記述)に対する分布 $P_w(s, p_s)$, (c) 30個の低損失モードの $P_w(s, p_s)$ の平均。

初期点集合の移送を支配する機構である。それがここでは、臨界線 $p = p_c$ 近傍に位置する周期3の周期運動の不安定集合 W_u によって決定されているのである。いいかえれば、不安定集合 W_u が放射される光の道筋を定めているのである^{17,18)}。

以上は、共振器外への光の放射を考慮した光線運動に基づく幾何光学的描像である。次に、波動的光学の立場に戻って、光の放射を考える。波動的記述に光線カオスの痕跡が見事に反映されていることを説明しよう^{19,20)}。分布 $P_r(s, p_s)$ に対応する波動的記述の分布は、共振器の共鳴

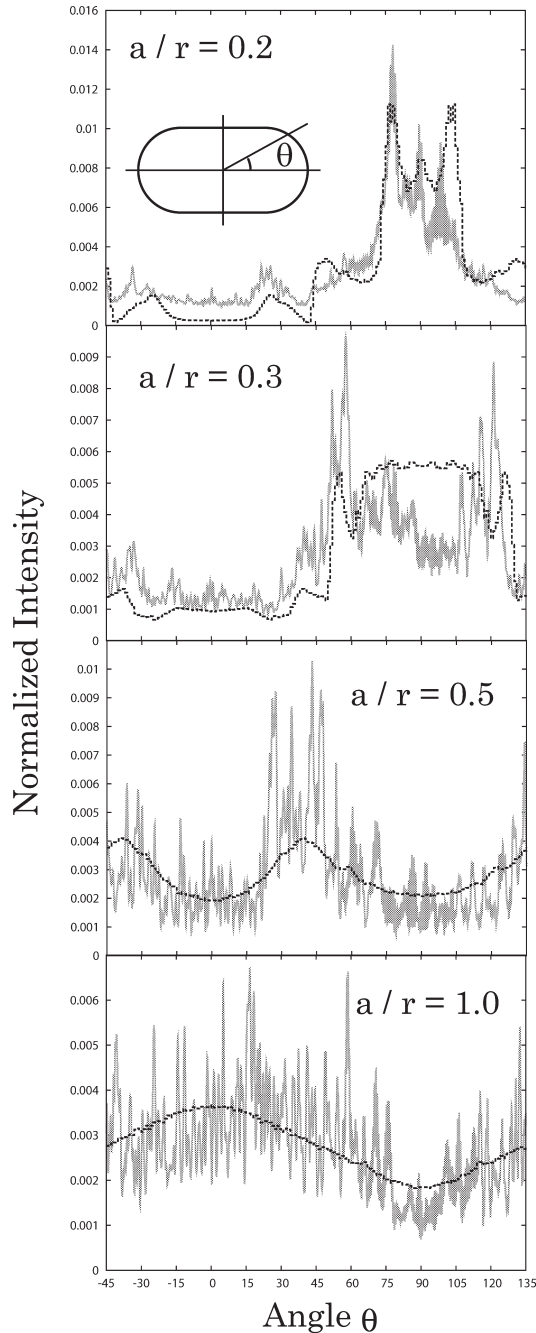


図13 スタジアム型微小共振器半導体レーザーの遠視野像。実験値(実線) vs. 光線シミュレーション(点線)。 a/r はスタジアムのアスペクト比パラメーター(図9参照)。

状態の波動関数 $\psi(x, y)$ (ヘルムホルツ方程式(5)の固有解)をもとに決めることができる。それを $P_w(s, p_s)$ と書けば、光線の記述の場合と同様、 $P_w(s, p_s)$ は、共振器壁の各箇所から放射される光のエネルギー流束分布を表す。各共鳴モードについて分布 $P_w(s, p_s)$ を求めてみると、寿命が長いモード ($|\text{Im}\omega|$ の小さなモード) に関しては、光線の記述に対する分布 $P_r(s, p_s)$ との類似性が明らかになる。すなわち、分布 $P_w(s, p_s)$ のサポートが分布 $P_r(s, p_s)$

のそれとほぼ一致する。その一例を図12(b)に示した。詳細をみると、波動光学的分布 $P_w(s, p_s)$ は幾何光学的分布 $P_r(s, p_s)$ に比べ、干渉効果のため非一様であるが、このずれは多数の低損失モードで平均すると、相殺されてしまう。実際図12(c)に示すように、30個の低損失モードで $P_w(s, p_s)$ を平均すると、 $P_r(s, p_s)$ と大変よく似た分布が得られる。

SB方程式のシミュレーションにおいて、ポンピングが強い極限では、多モード発振は共鳴状態とは著しく異なる。しかし、それほどポンピングが強くない状況下では、多モード発振状態は、低損失モードが多数発振する状態で近似でき、それらの「平均」が実現されて、その結果、光線の記述との一致がよくなるというシナリオを描くことが可能である。

このシナリオの正しさを示す実験的結果も得られているので、それを最後に紹介しよう^{12,20)}。図13に、スタジアム形状のアスペクト比 a/r をさまざまに変えた場合の遠視野像の実験データを示した。この実験では、多モード発振が実現されていることが、スペクトルデータから確認されている。いずれのアスペクト比の場合も、光線モデルの結果が、実験データをおおよそ再現していることがわかる。この結果は、多モード発振によって光線の記述との一致がよくなるというシナリオの傍証となる。

光線の運動が不安定で典型的なカオス運動を示す二次元共振器におけるレーザー発振の理論的研究を解説した。光線カオスを背景にした波動カオス状態が単独で安定に発振しうること、2モード以上の発振では引き込みによって自発的に対称性が破れ、その結果、非対称な発振が観測されることが示された。さらに、多数モードが発振しうる強ポンピング極限では、少数モードの発振が支配的であるという結果が得られた。光線運動のエルゴード性を反映して共鳴モードの棲み分けができず、激しいモード競合が起こり発振モード選択を受けることが、そのおもな原因である。また、波動カオス的な共鳴状態が柔軟で、モード間の非線形相互作用による変形を受けやすいことももうひとつの理由であろう。この結果は、まだ数値実験的に検証の余地があるとはいえ、可積分型共振器でみられる多モード発振と逆の傾向を示しており、非常に興味深い。最後に多モード発振状態からの放出過程が光線カオスを生み出す幾何学的不変構造を明確に反映していることが示され、カオス的な共振器からの放射パターンを決定するには、実空間より位相空間における力学的構造の研究が鍵になることが示された。

本稿で紹介した内容は ATR 波動工学研究所の原山卓久
非線形科学研究室室長と岡山県立大学の福嶋丈浩准教授と
の共同研究に基づくものである。また、ATR での研究は
情報通信研究機構の研究委託により行われている。

文 献

- 1) T. Harayama, S. Sunada and K. S. Ikeda: "Theory of two dimensional microcavity lasers," *Phys. Rev. A*, **72** (2005) 013803.
- 2) T. Harayama, P. Davis and K. S. Ikeda: "Nonlinear whispering gallery modes," *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 3803-3806.
- 3) K. Takahashi and K. S. Ikeda: "Application of symplectic integrator to stationary reactive-scattering problems: Inhomogeneous Schroedinger equation approach," *J. Chem. Phys.*, **106** (1997) 4463-4480.
- 4) 平山元きよ: "マイクロディスクレーザの非線形ダイナミクス", 立命館大学修士論文 (2001).
- 5) 窪田光宏: "円形マイクロディスクレーザにおける定常発振", *物性研究*, **78** (2002) 618-647.
- 6) T. Harayama, P. Davis and K. S. Ikeda: "Stable oscillations of a spatially chaotic wave function in a microstadium laser," *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 063901-1-4.
- 7) S. Sunada, T. Harayama and K. S. Ikeda: "Numerical simulations of two-dimensional microcavity lasers: Nonlinear dynamics of whispering gallery modes," *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, **10** (2007) 1-15.
- 8) L. A. Bunimovich: "On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards," *Commun. Math. Phys.*, **65** (1979) 295-312.
- 9) T. Harayama, T. Fukushima, S. Sunada and K. S. Ikeda: "Asymmetric stationary lasing patterns in 2D symmetric microcavities," *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003) 073903.
- 10) M. Choi, T. Fukushima and T. Harayama: "Alternate oscillations with π phase difference in quasi-stadium laser diodes," *CLEO/Pacific Rim 2007*, WG1-3 (2007).
- 11) T. Fukushima, T. Tanaka and T. Harayama: "Unidirectional beam emission from strained InGaAsP multiple-quantum well quasistadium laser diodes," *Appl. Phys. Lett.*, **86** (2005) 171103.
- 12) T. Fukushima and T. Harayama: "Stadium and quasi-stadium laser diodes," *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **10** (2004) 1039-1051.
- 13) T. Fukushima, T. Harayama, T. Miyasaka and P. O. Vaccaro: "Morphological dependence of lasing modes in two-dimensional quasi-stadium laser diodes," *J. Opt. Soc. Am. B*, **21** (2004) 935-943.
- 14) S. Sunada, T. Harayama and K. S. Ikeda: "Multimode lasing in fully chaotic cavity lasers," *Phys. Rev. E*, **74** (2005) 046209.
- 15) 原山卓久, 中村勝弘: 量子カオス (培風館, 2000) pp. 34-40.
- 16) M. Born and E. Wolf (草川 徹・横田英嗣訳): 光学の原理 I 第7版 (東海大学出版, 2005) pp. 65-73.
- 17) S. Shinohara, T. Harayama, H. E. Türeci and A. D. Stone: "Ray-wave correspondence in the nonlinear description of stadium-cavity lasers," *Phys. Rev. A*, **74** (2006) 033820.
- 18) H. G. L. Schwefel, N. B. Rex, H. E. Türeci, R. K. Chang, A. D. Stone, T. Ben-Messaoud and J. Zyss: "Dramatic shape sensitivity of directional emission patterns from similarly deformed cylindrical polymer lasers," *J. Opt. Soc. Am. B*, **21** (2004) 923-934.
- 19) S. Shinohara and T. Harayama: "Signature of ray chaos in quasibound wave functions for a stadium-shaped dielectric cavity," *Phys. Rev. E*, **75** (2007) 036216.
- 20) S. Shinohara, T. Fukushima and T. Harayama: "Light emission patterns from stadium-shaped semiconductor microcavity lasers," *Phys. Rev. A*. (in press).

(2007年11月2日受理)