

一歩ずつやさしく，一歩ずつきちんと

川上 彰二郎

(東北大学名誉教授・(株)フォトリテックス)

電磁気・電磁波・光に携わってきて，常に「ひっかかり」を感じてきたことを記します。

(A) マクスウェル方程式の物理的な意味が「ピンとくる」ためには，ベクトル量に作用する rot や div などの演算機能が視覚的，直感的に把握されていることが大切であろう。

ベクトル \mathbf{A} の発散 ($\text{div}\mathbf{A}$) という量を把握するのは，ガウスの定理

$$\int \text{div}\mathbf{A} dV (= \int \nabla \cdot \mathbf{A} dV) = \oint_S \mathbf{dS} \cdot \mathbf{A} \quad (1)$$

という助けがあって一応やさしい。一方，回転 ($\text{rot}\mathbf{A}$) については，ストークスの定理

$$\int \text{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} \quad (2)$$

があるが，閉曲線 C を 3 通りに変えつつ (2) で $\text{rot}\mathbf{A}$ の 3 つのスカラー成分を評価しないと「三次元ベクトルとしての $\text{rot}\mathbf{A}$ 」が求まらないのでありがたみが薄い。しかしベクトルの回転を発散なみに視覚化する公式は昔から知られていて，

$$\int \text{rot}\mathbf{A} dV (= \int \nabla \times \mathbf{A} dV) = \oint_S \mathbf{dS} \times \mathbf{A} \quad (3)$$

と書くことができる (例えば Stratton の本 (1941), p. 604, 式 (20))。図で表すと発散の説明が (a)，回転の説明が (b) であって視覚的にわかる：(b) で球の表面・内部でベクトル \mathbf{A} が「偏西風の」であれば回転は地軸北向きであることが， \mathbf{A} と法線ベクトル \mathbf{dS} とのベクトル積を考えると了解される。ベクトルの回転を教えるのには，式 (3) を正面玄関にするほうが明快である。なお式 (3) のことは数年前に岡部洋一教授から教わった (詳しくは www.moge.org/okabe/temp/elemag)。

(B) 回転，発散，ポテンシャルについて。電磁波や量子力学の多くの教科書でポテンシャルを導入している論理を吟味すると，「(空間形状，境界条件によらず一般に) 回転がゼロのベクトルにはスカラーポテンシャルが存在する，発散がゼロのベクトルにはベクトルポテンシャルが存在する」という前提を設けていると読みとられる (全部の本ではない)。領域の形や境界条件ぬきに上の主張をすることは誤りで，反例も簡単に作れる：同軸線路をリング状にループ化して直流電流を流し電圧をかけると，内部空間で $\text{div}\mathbf{E}=\text{rot}\mathbf{E}=0$ ， $\text{div}\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{B}=0$ である。しかし， \mathbf{E} にはベクトルポテンシャルがなく， \mathbf{B} にはスカラーポテンシャルが存在しない。空間の形を規定した上でスカラーポテンシャル，ベクトルポテンシャルが存在する必要十分条件が工学者や物理学者にわかる形で学術書に報告されたのはわずか数年前のことである (K. Kurokawa: IEEE AP, 49 (2001) 1315-1321, 荒木純道：電子情報通信学会誌, 88 (2005) 1004-1009)。ポテンシャルのきちんとした講義がようやく可能になった。

有用な成果を講義や教科書に採り入れて電磁気・電磁波・光の体系をわかりやすく論理的にしていくのは，光学の技術者研究者の大事な仕事のひとつと思われる。

