

強度分布に隠された位相情報

白 井 智 宏

Phase Information Hidden in the Intensity Distribution

Tomohiro SHIRAI

Noninterferometric methods for measuring optical phase (or, equivalently, wavefront) play a key role in various fields of optics such as biomedical imaging and characterization of large space telescopes. In this paper, we show quantitatively that the phase information is hidden in the intensity distribution and review some principles and applications of intensity-based phase measurements without interferometry. Specifically, we first derive the intensity transport equation to show how the intensity of light propagates depending on the phase and then give a solution to this equation. On the basis of the solution, we establish a method of phase measurements using two defocused images. As some related topics, we also discuss a principle of curvature sensing and that of image-based phase retrieval using phase diversity.

Key words: intensity transport equation, phase diversity, phase measurement, curvature sensing, image-based phase retrieval

最近、ヒトの網膜を生きたまま観察する眼底イメージング¹⁾や顕微鏡を使った細胞イメージング²⁾など、光を利用したイメージング技術の話題をよく耳にする。イメージング技術における究極の目標は、「いかにして忠実に物体の像を再現するか？」に尽きると思うが、このときに最も重要な役割を果たすのが位相を計測する技術といえるかもしれない。例えば、眼底イメージングでは、角膜や水晶体などの歪みの影響により入射光の位相（波面）が乱れ、取得される眼底像はぼやけてしまう。しかし、この眼底イメージング機器に位相（波面）の乱れを計測し補正する補償光学技術を導入すると、きわめて解像度の高い鮮明な眼底像を取得することが可能となる。一方、顕微鏡を使って生物試料をそのまま観察しても、位相物体である無色透明の細胞を直接見ることはできない。細胞のイメージング技術は、見えない位相を可視化する位相計測技術と考えることもできよう。

光の位相（波面）を計測する技術というと、真っ先に干渉計測法を思い浮かべる読者も少なくないと思われる。し

かし、干渉計測法は、一般に光学系が複雑になることや振動などの外乱に弱いなどの問題により、特にバイオ・メディカル分野への応用では、その性能が十分に発揮されない場合も多い。そのため、これらの分野では、光の干渉を利用しない安定性にすぐれた位相計測法の実現が期待されている。その有力候補のひとつが、強度分布に隠された位相情報を読み取る方法である。

本稿では、強度分布に位相情報が隠されていることを定量的に明らかにしたうえで、それを利用した位相計測原理のいくつかとその応用について概説する。

1. 強度と位相の密接な関係—強度輸送方程式の導出—

光の波動振幅が波動方程式に従って伝搬することはよく知られている。一方、波動振幅の2乗で与えられる光の強度が、ある種の伝搬方程式に従って伝搬することはあまり知られていないように思われる。ここでは、光の強度の伝搬を記述する強度輸送方程式 (intensity transport equation) を導出し、強度の伝搬が位相と密接に関係している

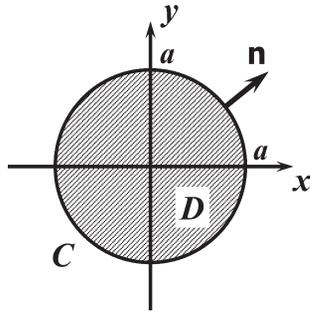


図1 解析領域. 半径 a の円形開口の内部を D , その境界を C , 境界に垂直な外向きの単位ベクトルを \mathbf{n} とする.

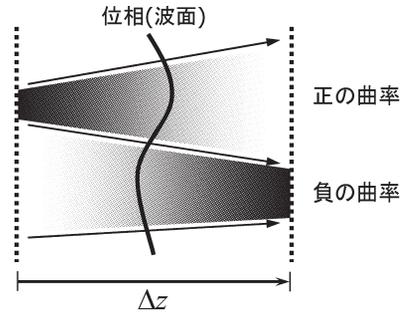


図2 強度輸送方程式による位相(波面)測定概念. 位相の曲率が正(負)の場合には, 光の伝搬にともない局所的な強度は減少(増加)する.

ことを明らかにしよう.

単色の波動場を考え, その空間依存項を $u(\mathbf{r})$ とおく. さらに, この $u(\mathbf{r})$ は z 軸方向に沿って伝搬するものとして,

$$u(\mathbf{r}) = u_z(\boldsymbol{\rho}) \exp(-ikz) \quad (1)$$

が成り立つと仮定する(近軸近似). このとき, $u_z(\boldsymbol{\rho})$ は放物型のヘルムホルツ方程式

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - 2ik \frac{\partial}{\partial z}\right) u_z(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (2)$$

に従って伝搬する^{*1}. ここで, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ は三次元の位置ベクトル, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ は二次元の位置ベクトル, $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/x^2 + \partial^2/y^2$ は二次元のラプラシアン, $k = \omega/c$ は波数である(ω : 周波数, c : 光の速度).

さて, 式(2)を出発点として強度輸送方程式を導出するために, 波動振幅 $u_z(\boldsymbol{\rho})$ を強度 $I_z(\boldsymbol{\rho})$ と位相 $\phi_z(\boldsymbol{\rho})$ を使って

$$u_z(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{I_z(\boldsymbol{\rho})} \exp[i\phi_z(\boldsymbol{\rho})] \quad (3)$$

と表現しよう. 以降の数学的な手続きは少し面倒なので, その要点のみを説明する. まず, 式(3)を式(2)に代入し, その両辺に式(3)の右辺の複素共役をかけ算する. 次に, 式(3)を式(2)に代入した式の複素共役を考え, その両辺に式(3)の右辺をかけ算する. これら2つの方程式を引き算して整理すると, 強度輸送方程式

$$\nabla_{\perp} \cdot \{I_z(\boldsymbol{\rho}) \nabla_{\perp} \phi_z(\boldsymbol{\rho})\} = -k \frac{\partial I_z(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} \quad (4)$$

が導出される³⁾. この式は, 光の強度 $I_z(\boldsymbol{\rho})$ と位相 $\phi_z(\boldsymbol{\rho})$ が2階の偏微分方程式に従って伝搬することをあらわしているが, 波動振幅の伝搬を記述するヘルムホルツ方程式とは異なり, その物理的意味がわかりにくい. そこで, 光学の分野でしばしば出くわす状況として, 半径 a の円形開

口を考え, その内部 D での位相を求める問題を考える. このとき, その開口の内部では強度は一樣 ($I_z(\boldsymbol{\rho}) = I_0$) であり位相は連続であると仮定すると, 式(4)は

$$W_A(\boldsymbol{\rho}) \nabla_{\perp}^2 \phi_z(\boldsymbol{\rho}) - \delta_c \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \phi_z(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{k}{I_0} \frac{\partial I_z(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} \quad (5)$$

となる. ここで, $W_A(\boldsymbol{\rho})$ は開口関数

$$W_A(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} 1 & |\boldsymbol{\rho}| \leq a \\ 0 & |\boldsymbol{\rho}| > a \end{cases} \quad (6)$$

であり, δ_c は境界 C 上で定義されるデルタ関数, \mathbf{n} は境界に垂直な外向きの単位ベクトルである(図1参照).

式(5)は, やや複雑な形をしているが基本的にはポアソン方程式である. これを確認するために開口内部の場へのみ着目すると, 式(5)は簡単になり

$$\nabla_{\perp}^2 \phi_z(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{k}{I_0} \frac{\partial I_z(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} \quad (7)$$

と表現される. ここで, 式(7)の左辺は位相(波面)の曲率をあらわし, その右辺は強度の伝搬方向(z 方向)の変化量をあらわしている. そのため, 式(7)は以下のような明確な物理的意味をもつことになる. すなわち, 位相の曲率が正の場合には, その大きさに比例して伝搬にともなう局所的な強度は減少し, 位相の曲率が負の場合には, その大きさに比例して伝搬にともなう局所的な強度が増加する. この状況を図2に示す. これは, 例えば, 顕微鏡を使って位相物体を観察する場合, デフォーカスによって濃淡分布を発生させ可視化する手法の理論的な根拠を与えるものとなる.

以下では, 一樣な強度分布 I_0 をもつ円形開口 D 内での位相 $\phi_z(\boldsymbol{\rho})$ を求める問題に限定し, 強度輸送方程式として式(5)に基づく解析を行う.

*1 式(2)は, ヘルムホルツ方程式 $(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r}) = 0$ に式(1)を代入し, $\partial^2 u_z(\boldsymbol{\rho})/\partial z^2$ を十分に小さいものとして無視することにより導出される.

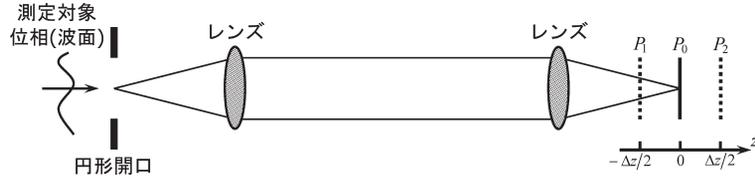


図3 強度の伝搬方向の微分値 ($\partial I_z(\boldsymbol{\rho})/\partial z$) を近似的に評価するための光学系。 P_0 面は円形開口の結像面である。デフォーカス像は、 P_1 面と P_2 面で測定される。

2. 強度輸送方程式の解法

2.1 問題の取り扱い

式(5)で与えられる強度輸送方程式(ポアソン方程式)を $\phi_z(\boldsymbol{\rho})$ について解き、それを $I_z(\boldsymbol{\rho})$ の関数として記述できれば、強度に基づく位相計測の原理となる。これを明確に示すために、ここでは見通しのよい一般解を得ることができるグリーン関数を使った解法を導入する。

一般に、この種の偏微分方程式は、境界条件の与え方によりディリクレ問題とノイマン問題に分けて考えることができる⁴⁾。Teague は、その先駆的な研究の中で強度輸送方程式をディリクレ問題として解析し、求めるべき円形開口内の位相がその開口内の強度と境界上の位相によって与えられることを示した³⁾。一方、Gureyev ら⁵⁾ および Woods ら⁶⁾ は、強度輸送方程式をノイマン問題として解析することにより、Teague の手法では不可欠であった境界上での位相の測定が不要となり、求めるべき開口内部の位相がその内部と境界上の強度のみの測定により決定できることを示した。特に、Woods らの解析では、境界条件が自然な形で組み込まれたために境界上での強度情報は不要となり、求めるべき開口内部の位相はその内部の強度のみによって決定されることが示されている。

冒頭でも触れた補償光学や各種イメージングへの応用を考える場合、位相計測には実時間性が要求される。そのためには、できるだけ面倒な計測手順は排除されることが望ましい。上述の Woods らの手法は、まさにそのような要求を満たす有望な原理となることが期待される。そこで以下では、強度輸送方程式を解く手法のひとつとして、Woods らの解析の概要を紹介する。

2.2 理論解析

式(5)で与えられる強度輸送方程式(ポアソン方程式)を、グリーン関数を使ってノイマン問題として解くことを考えよう⁶⁾。この場合、グリーン関数 $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ に要求される性質は、 δ をディラックのデルタ関数とすると

$$\nabla_{\perp}^2 G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}) = -\delta(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}), \quad \left. \frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right|_c = -\frac{1}{2\pi a} \quad (8)$$

となる*2(図1参照)。また、任意の関数 $U(\boldsymbol{\rho})$ および $V(\boldsymbol{\rho})$ について成り立つグリーンの公式

$$\int_D \{U(\boldsymbol{\rho}) \nabla_{\perp}^2 V(\boldsymbol{\rho}) - V(\boldsymbol{\rho}) \nabla_{\perp}^2 U(\boldsymbol{\rho})\} d^2 \rho = \int_c \left\{ U(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial V(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} - V(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial U(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right\} ds \quad (9)$$

を準備する。式(9)において、 $U(\boldsymbol{\rho}) = G(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho})$ および $V(\boldsymbol{\rho}) = \phi_z(\boldsymbol{\rho})$ とおき、式(5)と式(8)を使って整理すると、式(5)の解として(ただし、定数項を省く)

$$\phi_z(\boldsymbol{\rho}) = \frac{k}{I_0} \int_D G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial I_z(\boldsymbol{\rho}')}{\partial z} d^2 \rho' \quad (10)$$

が導出される。ここで、式(10)に含まれるグリーン関数 $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ については、解析的な表現式が求められている⁷⁾。

このようにグリーン関数 $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ は既知なので、式(10)の被積分関数の第2項目に対応する強度の伝搬方向微分 $\partial I_z(\boldsymbol{\rho})/\partial z$ がわかれば、式(10)に基づき位相を決定することが可能となる。一般に、強度の伝搬方向の微分は測定可能な物理量ではないが、近似的には伝搬方向に沿って Δz だけ離れた2面の強度分布 $I_{z-\Delta z/2}$ および $I_{z+\Delta z/2}$ を利用して、

$$\frac{\partial I_z(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} \approx \frac{I_{z+\Delta z/2}(\boldsymbol{\rho}) - I_{z-\Delta z/2}(\boldsymbol{\rho})}{\Delta z} \quad (11)$$

によって評価することができる。つまり、2枚のデフォーカス像の差を利用するのである。実験的には、例えば、図3に示される光学系に基づき式(11)の値を求めることができる。さらに、適当に設計された回折光学素子を利用すると、異なる2面の強度分布を同じ平面上に実現することができるため、2枚の強度分布を1台のCCDカメラで効率よく取得することも可能となる⁸⁾。

*2 本稿で導入するグリーン関数は、Woods らが文献6)で導入したグリーン関数とは若干異なることに注意されたい。Woods らの解析ではグリーン関数の選び方に依存して数学的な矛盾が生じているが、式(8)の性質を満たすグリーン関数を導入すると、そのような矛盾を排除することができる。なお、 ∇_{\perp}^2 や $\partial/\partial n$ は位置ベクトル $\boldsymbol{\rho}$ に作用するものとする。

以上の結果、被測定面から少し離れた2枚の強度分布を測定することにより、式(10)と式(11)に基づき、その面での位相分布が求められることが明らかとなった。

ここでは、式(4)で与えられる一般的な強度輸送方程式が式(5)で与えられるポアソン方程式に帰着される場合に限定して、それをノイマン型の境界条件のもとでグリーン関数を使って解析する方法を説明した。しかし、強度輸送方程式を解く方法はこれだけではなく、実際には目的に応じて異なる解析法が提案され⁹⁾、いろいろな応用分野に適用されている¹⁰⁾。その中でも、特に、X線を使った定量的位相イメージングの可能性を理論と実験により示したNugentらのグループの研究は注目に値する¹¹⁾。

2.3 モード展開を利用した位相の高速評価

前節で導出された式(10)は、多くの場合、計算機により数値的に評価される。このとき式(10)を単純に離散化すると、サンプル点数の2乗に相当する演算が必要になる。高い精度を確保するためにサンプル点数を増やすと、これにかかる演算時間は一般に無視できなくなってしまう。これは、例えば補償光学などの実時間性が要求される応用においてはあまり好ましくない。そこで、式(10)を数値的に素早く評価することを目的として、位相そのものではなく、それと等価な情報を提供する位相のモード展開係数を求める方法を考える。

一般に、円形開口内の位相 $\phi_z(\rho)$ は、その内部で定義される直交関数系であるツェルニケ多項式(モード) $Z_j(\rho/a)$ を使って、

$$\phi_z(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Z_j(\rho/a) \quad (12)$$

と一意に展開することができる¹²⁾。また、展開係数は

$$b_j = \frac{1}{\pi a^2} \int_D \phi_z(\rho) Z_j(\rho/a) d^2\rho \quad (13)$$

によって評価される。

ここで、式(10)で与えられる位相のモード展開係数を求めるために、式(10)を式(13)に代入し整理すると、

$$b_j = \frac{k}{I_0} \int_D G_j(\rho') \frac{\partial I_z(\rho')}{\partial z} d^2\rho' \quad (14)$$

が導出される。ここで、

$$G_j(\rho') = \frac{1}{\pi a^2} \int_D G(\rho, \rho') Z_j(\rho/a) d^2\rho \quad (15)$$

である。

式(15)は、すべて既知の関数で構成されているため、事前に数値評価してテーブル化しておくことができる。また、式(14)に含まれる強度の伝搬方向微分は、式(10)と同様に式(11)により近似できるため、実際には2枚の強度分布(デフォーカス像)の測定により実験的に評価される。その結果、式(14)で与えられるモード展開係数は、サンプル点数回の単純な和演算で求められるようになるため、その演算処理は式(10)の直接評価に比べて十分に短い時間で完了する。

以上の原理の有効性を検証するために、5つのツェルニケモードの重ね合わせで実現される位相分布を仮定し、この位相分布を式(14)に基づいて評価する計算機シミュレーションを行った⁷⁾。測定すべき2枚の強度分布(デフォーカス像)は回折像を計算する市販のソフトウェア Diffract (MM Research, Inc.) を使って数値的に作成し、これを強度の測定値(実験値)とみなした。また、このシミュレーションでは、円形開口の半径 a を3 mm、展開に

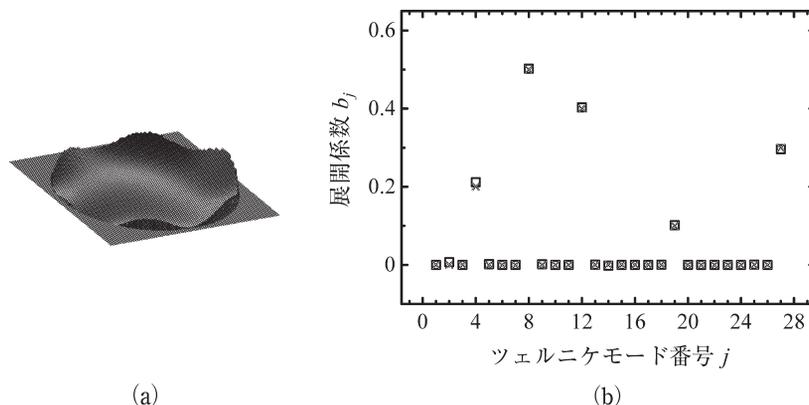


図4 原理の検証実験(計算機シミュレーション)の一例。(a) 5つのツェルニケモード(モード番号: 4, 8, 12, 19, 27)の重ね合わせによって実現される位相。それぞれの係数の大きさは、 0.2λ , 0.5λ , 0.4λ , 0.1λ , 0.3λ とした(λ は波長)。(b) 入射位相のモード係数分布(×印)と2枚のデフォーカス像に基づいて評価された位相のモード係数分布(□印)。円形開口の半径を $a=3$ mm、2枚のデフォーカス像の距離を $\Delta z=6$ mm とした。

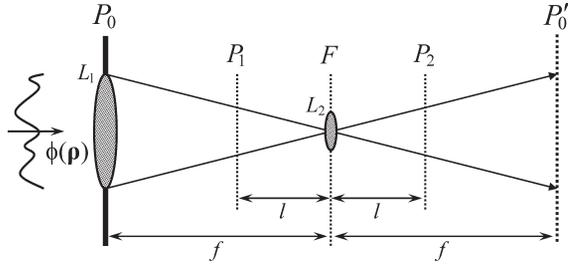


図5 波面曲率センサーの概念図。図中の記号は本文を参照。

使用するモード数を27個（六次のツェルニケモードに対応）、サンプリング数を 256×256 とした。その結果を図4に示す。強度分布を測定する2面間の距離 Δz が円形開口の直径の数倍程度（ $\Delta z = 6 \sim 24$ mm）であれば、その距離 Δz に依存せずに、各モードの展開係数がほぼ忠実に再現できることが確認された。すべてのモードの展開係数を評価するために必要な演算時間は、一般的なパソコン（Mobile Pentium 4, 2 GHz）を使用して100 ms程度であったが、プログラムの最適化により、さらに短縮することができる。

3. 波面曲率センシングの原理

前章までの議論により、強度輸送方程式を利用すると、2枚のデフォーカス像から位相もしくは位相のモード展開係数が求められることが明らかとなった。このように（デフォーカスなど異なる位相を導入して取得した）複数枚の強度分布を利用して位相分布を求める手法を、一般に、位相ダイバーシティ（phase diversity）法とよぶ¹³⁾。

この位相ダイバーシティ法を使った位相（波面）計測の中で、すでにその有効性が広く認識され、実用化されている原理がある。それは1988年にRoddierによって考案された波面曲率センサーである^{14,15)}。その光学系の概念を図5に示す。測定対象となる位相（波面） $\phi(\rho)$ をもつ光波が、左側から焦点距離 f のレンズ L_1 が設置された円形開口（ P_0 面）に入射する。その焦点面 F を中心として左右対称の位置に（仮想的に）観測面 P_1 および P_2 を設置し、それぞれの面における強度分布を測定する。ここで、焦点面と観測面の距離は l とする。また、対称性を保つために、焦点面には焦点距離 $f/2$ のレンズ L_2 を設置する。このレンズの作用により、入射開口の像が P'_0 面に形成される。Roddierは最初に回折理論に基づき、 P_1 面の強度 I_1 と P_2 面の強度 I_2 の差が、

$$\frac{I_1(\rho) - I_2(-\rho)}{I_1(\rho) + I_2(-\rho)} = \frac{f(f-l)}{kl} \left[\frac{\partial}{\partial n} \phi\left(\frac{f}{l}\rho\right) \delta_c - \nabla_{\perp}^2 \phi\left(\frac{f}{l}\rho\right) \right] \quad (16)$$

で表現されることを示した¹⁶⁾。ここで、式(16)の右辺の括弧[...]内の第1項目は境界上での位相の法線方向微分を、第2項目は位相の曲率（ラプラシアン）をあらわしている。観測面上の強度と同様に、この第1項目も実験的に測定できる量であるため、式(16)を利用すると位相の曲率を求めることができる。すなわち、式(16)は波面曲率センサーの原理を与える基本式となる。

Roddierは後に、大雑把ではあるが、この基本式が強度輸送方程式に基づいても導出できることを示している¹⁷⁾。それをここで簡単に紹介しておこう。図5の光学系では、レンズ L_1 の作用を考慮すると、観測面 P_1 上で強度 I_1 をもつ光波は、強度 I_0 をもつ入射光が P_0 面から右向き（正の方向）に距離 $f(f-l)/l$ だけ伝搬したものとみなすことができる^{*3)}。また、観測面 P_2 上で強度 I_2 をもつ光波は、光学系の対称性により、強度 I_0 をもつ入射光が P_0 面から左向き（負の方向）に同じ距離だけ伝搬したものとみなすことができる。その結果、観測面 P_1 上の強度 I_1 と観測面 P_2 上の強度 I_2 は、それぞれ

$$\begin{cases} I_1 \\ I_2 \end{cases} = I_0 \pm \frac{\partial I_z}{\partial z} \frac{f(f-l)}{l} \quad (17)$$

と記述することができる。この式を利用すると、

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{f(f-l)}{l} \frac{1}{I_0} \frac{\partial I_z}{\partial z} \quad (18)$$

を得る。さらに、一様な強度分布をもつ円形開口を対象とする強度輸送方程式(5)を、式(18)に代入して整理すると

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{f(f-l)}{kl} \left[\delta_c \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \phi_z(\rho) - W_A(\rho) \nabla_{\perp}^2 \phi_z(\rho) \right] \quad (19)$$

が導出される。ここで、 $\mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} = \partial / \partial n$ であることと、 W_A が式(6)で与えられることを思い出し、さらに光学系の幾何光学的なスケールを考慮すると、式(19)と式(16)は完全に一致することがわかる。このように、強度輸送方程式に基づいても、波面曲率センサーの基本式(16)を導出できることが明らかとなった。

この波面曲率センサーの原理は、もともとは天文学用の補償光学系への応用を前提として提案されたものである。天文学用の補償光学系といえば、それまではシャック・ハ

*3 焦点距離 f のレンズに入射する光波が、距離 $(f-l)$ 伝搬する様子をフレネル回折積分に基づき評価すると、この伝搬距離が（レンズのない）自由空間では $f(f-l)/l$ に対応することがわかる。

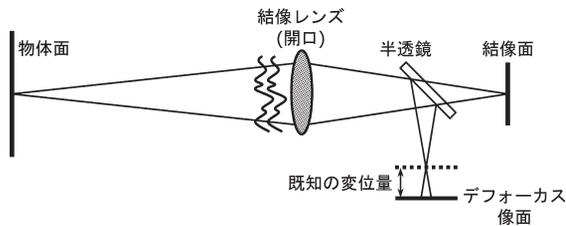


図6 像面の強度を利用した位相ダイバーシティ法。

ルトマンセンサーが広く導入されていたが、最近ではこの波面曲率センサーが好んで利用されているようである^{18,19)}。その理由として、波面曲率センサーはシャック・ハルトマンセンサーに比べて、①大気のゆらぎの測定に適していること、②実際の測定が簡単であること、③波面の再構成のための計算が簡単であること、などが挙げられる。さらに、バイモルフ型の変形鏡は印加電圧に応じて局所的な波面の曲率を制御する波面補正素子であるため、これを波面曲率センサーと組み合わせることにより、④きわめて高速な補償光学制御ループの実現が可能となることも重要なポイントとなっている。

波面曲率センサーの応用分野は、当初想定されていた天文学用の補償光学系の枠を超えて拡大しつつある。例えば、大型の反射型天体望遠鏡の主鏡の検査など関連する分野での応用例もあるが²⁰⁾、最近では、ヒトの眼球光学系や涙液によって引き起こされる収差の測定にも利用されている^{21,22)}。

4. 像面の強度を利用した位相ダイバーシティ法

これまでの議論では、円形開口内の位相分布を求めるために、その開口の近傍における強度分布（デフォーカス像）を利用する方法について説明した。この手法をイメージング光学系の収差測定に応用する場合には、理想的な点光源を準備して、その点光源が結像レンズ近傍に形成する波動場の強度分布を測定しなければならない。しかし、一般に、理想的な点光源を準備することは必ずしも容易ではない。

この問題を解決するひとつの方法が、イメージング光学系の像強度分布を利用した位相ダイバーシティ法である^{23,24)}。これは一種の位相回復問題であり、必ずしも強度輸送方程式に基づくものではないが、強度分布を利用した位相測定法のひとつに分類されるので、その要点を簡単に紹介しよう。

この手法では、図6に示すように、同じ物体の像をイメージング光学系の結像面と結像面から既知量シフトしたデフォーカス像面で測定する。一般に、インコヒーレント光

を利用するイメージング光学系の像強度分布は、物体の強度分布と光学系の点像強度分布の畳み込み積分で記述されることが知られている。また、点像強度分布は開口関数 $P(\rho) = A(\rho) \exp[i\phi(\rho)]$ のフーリエ変換の2乗で与えられる。この開口関数の位相 $\phi(\rho)$ が、求めるべき位相に相当する。これを、周波数領域で定式化すると、

$$G(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u}) \cdot F(\mathbf{u}) \quad (20)$$

となる。ここで $G(\mathbf{u})$ 、 $H(\mathbf{u})$ 、 $F(\mathbf{u})$ は、それぞれ像強度分布、点像強度分布、物体強度分布のフーリエ変換であり、 \mathbf{u} は二次元の空間周波数ベクトルである。この式では、求めるべき位相は点像強度分布のフーリエ変換 $H(\mathbf{u})$ に含まれている。なお、開口関数の振幅 $A(\rho)$ は、開口内では1に、開口外では0に近似する。

式(20)は結像面における強度分布（のフーリエ変換 $G(\mathbf{u})$ ）をあらわす基本式となる。同様に、デフォーカス像面における強度分布（のフーリエ変換 $G_d(\mathbf{u})$ ）をあらわす基本式は

$$G_d(\mathbf{u}) = H_d(\mathbf{u}) \cdot F(\mathbf{u}) \quad (21)$$

となる。ここで、 $H_d(\mathbf{u})$ は、（デフォーカスによって）既知の位相 $\theta(\rho)$ が付加された開口関数 $P_d(\rho) = A(\rho) \exp\{i[\phi(\rho) + \theta(\rho)]\}$ に対応する点像強度分布のフーリエ変換である。

$G(\mathbf{u})$ および $G_d(\mathbf{u})$ は、結像面およびデフォーカス像面の強度分布を測定することにより求めることができる。それらの測定値を利用し、例えば、ある基準値を最小化するように計算機による反復演算を行うことによって¹³⁾、未知関数である $H(\mathbf{u})$ 、 $H_d(\mathbf{u})$ 、 $F(\mathbf{u})$ が評価される。その結果、位相 $\phi(\rho)$ とあわせて理想的な像強度分布を求めることができる。

以上の原理に基づく位相計測および画像回復法は、1990年に打ち上げられたハッブル宇宙望遠鏡による天体像の回復に、さらにその後継機となる2013年に打ち上げ予定のジェームズ・ウェッブ宇宙望遠鏡の収差の測定とその制御（18枚の分割鏡のアライメント調整）に利用され、大きな成果を収めている²⁵⁾。また、解析アルゴリズムの改良と計算機のハードウェアの性能向上により演算時間の短縮も図られており、すでに計測レートが15 Hz および 50 Hz の高速位相計測が実現されている^{26,27)}。

この原理に基づく位相計測法は、光学系が単純であり計測速度も十分に速いことから、補償光学系への適用が大いに期待されている²⁸⁾。

本稿では、光の強度と位相の密接な関係を明らかにした

うえで、強度分布のみを利用した位相計測原理のいくつかを紹介した。特に、各種イメージングへの応用を念頭に、2枚のデフォーカス像など複数枚の強度分布を利用する位相ダイバーシティ法に限定した議論を行った。

位相(波面)計測という点、どうしても干渉計を使った計測法を無視することはできないが、安定性などの問題からバイオ・メディカル分野ではその性能を十分に発揮できないことも多い。また、大型の宇宙望遠鏡の主鏡の評価や調整など、干渉計の利用が制限される分野も少なくない。

このような分野では、干渉計を利用しない強度情報のみに基づく位相計測の原理が不可欠となるが、その重要性は干渉計測ほど十分には理解されていないように思われる。干渉効果を利用しない強度ベースの位相計測法の今後の発展を期待したい。

文 献

- 1) 白井智宏：“バイオ・医療のための補償光学技術—生活習慣病に挑む超高解像眼底イメージングを中心として—”，第40回サマーセミナー「命と光—光学とバイオ・医療との関係—」論文集，AP062332 (2006) pp. 56-63.
- 2) 高田邦昭，斎藤尚亮，川上速人編：染色・バイオイメージング実験ハンドブック (羊土社，2006)。
- 3) M. R. Teague: “Deterministic phase retrieval: A Green's function solution,” *J. Opt. Soc. Am.*, **73** (1983) 1434-1441.
- 4) 今井 勤：物理とグリーン関数 (岩波，1978)。
- 5) T. E. Gureyev, A. Roberts and K. A. Nugent: “Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: Matrix solution with use of Zernike polynomials,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **12** (1995) 1932-1941.
- 6) S. C. Woods and A. H. Greenaway: “Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **20** (2003) 508-512.
- 7) T. Shirai: “Modal wavefront sensing based on the intensity transport equation and its performance,” *Proc. of ICO21-2008 Congress* (2008) p. 25.
- 8) P. M. Blanchard, D. J. Fisher, S. C. Woods and A. H. Greenaway: “Phase-diversity wave-front sensing with a distorted diffraction grating,” *Appl. Opt.*, **39** (2000) 6649-6655.
- 9) 例えば，K. Ichikawa, A. W. Lohmann and M. Takeda: “Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: Experiments,” *Appl. Opt.*, **27** (1988) 3433-3436.
- 10) 例えば，G. Gbur and E. Wolf: “Hybrid diffraction tomography without phase information,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **19**

(2002) 2194-2202.

- 11) 解説記事として，K. A. Nugent, D. Paganin and T. E. Gureyev: “A phase odyssey,” *Phys. Today*, August (2001) 27-32.
- 12) J. Porter, H. Queener, J. Lin, K. Thorn and A. Awwal, ed.: *Adaptive Optics for Vision Science* (Wiley, Hoboken, 2006) Appendix A.
- 13) R. A. Gonsalves: “Phase retrieval and diversity in adaptive optics,” *Opt. Eng.*, **21** (1982) 829-832.
- 14) F. Roddier: “Curvature sensing and compensation: A new concept in adaptive optics,” *Appl. Opt.*, **27** (1988) 1223-1225.
- 15) F. Roddier, C. Roddier and N. Roddier: “Curvature sensing: A new wavefront sensing method,” *Proc. SPIE*, **976** (1988) 203-209.
- 16) F. Roddier: “Curvature sensing: A diffraction theory,” *NOAO Advanced Development Program, R&D Note*, 87-3 (1987).
- 17) F. Roddier: “Wavefront sensing and the irradiance transport equation,” *Appl. Opt.*, **29** (1990) 1402-1403.
- 18) 白井智宏：“補償光学技術の新しい展開=医療・工業分野への応用を目指して=”，*光アイアンス*，**17** (2006) 1-7.
- 19) 竹野耕平，白井智宏：“医療・工業分野への応用を目指す新しい補償光学”，*光技術コンタクト*，**45** (2007) 244-250.
- 20) C. Roddier and F. Roddier: “Wave-front reconstruction from defocused images and the testing of ground-based optical telescope,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **10** (1993) 2277-2287.
- 21) S. Gruppeta, F. Lacombe and P. Puget: “Study of the dynamic aberrations of the human tear film,” *Opt. Express*, **13** (2005) 7631-7636.
- 22) F. Diaz-Doulton, J. Pujol, M. Arjona and S. O. Luque: “Curvature sensor for ocular wavefront measurement,” *Opt. Lett.*, **31** (2006) 2245-2247.
- 23) R. G. Paxman and J. R. Fienup: “Optical misalignment sensing and image reconstruction using phase diversity,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **5** (1988) 914-923.
- 24) R. G. Paxman, T. J. Schulz and J. R. Fienup: “Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **9** (1992) 1072-1085.
- 25) J. R. Fienup: “Recent topics in wavefront sensing and control,” *Technical Digest, Frontiers in Optics 2008*, FMM3 (2008).
- 26) R. L. Kendrick, J. Aubrun, R. Bell, *et al.*: “Wide-field Fizeau imaging telescope: Experimental results,” *Appl. Opt.*, **45** (2006) 4235-4240.
- 27) J. J. Dolne, P. Menicucci, D. Miccolis, K. Widen, H. Seiden, F. Vachss and H. Schall: “Advanced image processing and wavefront sensing with real-time phase diversity,” *Appl. Opt.*, **48** (2009) A30-A34.
- 28) R. G. Paxman: “Phase-diverse wavefront sensing and control,” *Technical Digest, Frontiers in Optics 2008*, FMM2 (2008).

(2009年5月11日受理)