■光学工房

FFT法を用いるフレネル回折計算

～サンプリング定理による考察～

計算機ホログラムやディジタルホログラフィーにおいては，自由空間における光波の伝搬を計算機により数値計算する必要があります．この際，光波の伝搬を高速に計算するために FFT 法（fast Fourier transform algorithm）が用いられます．FFT 法において誤差のない計算結果を得るためには，計算する信号（画像）を，サンプリング定理を満足するように標本化する必要があります．フレネル領域の回折計算は，離散フーリエ変換，フレネル回折，サンプリング定理といったごく基本的な理論に基づいているので，教科書レベルの内容を理解していれば容易に実装できそうに思えますが，実際に計算を行う際にはしばしば正しい結果が得られずに苦労することがあります．サンプリング間隔とフレネル回折の伝搬距離が依存関係にあるため，それらの関係を適切に扱わないと，適切な大きさの再生像が得られない，エリアジングが生じる，などといった問題が発生します．ここでは，FFT 法を用いるフレネル回折計算において生じる計算精度の問題をサンプリング定理から考察します．なお，簡単化のため関数は一次元で表記し，定数項などは省略しています．

開口面の複素振幅 $g(x_0)$ のフレネル領域における回折像をフーリエ変換により計算することを考えてみましょう．この際，$g(x_0)$ の大きさを Δx_0 とします．フレネル・キルヒホッフの回折式を放物面近似することにより，フレネル回折像 $u_z(x_z)$ は

$$
\begin{aligned}
u_z(x_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0)\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi(x_0-x_z)^2}{\lambda z}\right]\mathrm{d}x_0 \\
&= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda z}x_z^{\,2}\right)\mathcal{F}\left[g(x_0)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda z}x_0^{\,2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

となります．ここで，λ は光波の波長，z は伝搬距離，$\mathcal{F}[\cdots]$ はフーリエ変換演算を表しています．このとき，フーリエ変換により得られる空間周波数は，$x_z/(\lambda z)$ となります．式（1）は，$g(x_0)$ に位相因子を積算しフーリエ変換を行い，その結果にさらに位相因子を積算する計算となります．

また，式（1）は畳み込み積分となっており，畳み込み定理によりフーリエ変換を用いて計算できます．

$$
u_z(x_z) \propto \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[g(x_0)]\exp(-\mathrm{i}\pi\lambda z\mu^2)\}
\tag{2}
$$

ここで，$\mathcal{F}^{-1}\{\cdots\}$ は逆フーリエ変換演算を表します．式（2）は，$g(x_0)$ のフーリエ変換を行い，その結果に位相因子を積算し，さらに逆フーリエ変換を行う計算となります．

回折像は，式（1）を使って計算しても式（2）を使って計算しても，式（2）で無視した係数を含めると全く同じ結果が得られるはずですが，FFT 法を用いる計算では，ある特定の伝搬距離を除いて異なる計算結果が得られます．その原因は，式（1），（2）に含まれる位相因子の周波数が伝搬距離 z により変化し，サンプリング定理を満足しない状態を生じるためです．

式（1），（2）を FFT 法により計算できるように標本化します．この際，サンプル点数を N とし，サンプリング間隔 $\delta x_0 = \Delta x_0/N$ は，$g(x_0)$ を標本化するとき，サンプリング定理を満足するものとします．回折面の計算領域を $\Delta x_z = \lambda z/\delta x_0 = \lambda z N/\Delta x_0$ とすると，式（1）は

$$
u_z\left(n'\frac{\lambda z}{\Delta x_0}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\pi\frac{\lambda z}{\Delta x_0^{\,2}}n'^2\right)
\mathrm{FFT}\left[g\left(n\frac{\Delta x_0}{N}\right)\exp\left(\mathrm{i}\pi\frac{\Delta x_0^{\,2}}{\lambda z N^2}n^2\right)\right]
\tag{3}
$$

であり，また，式（2）は，

$$
u_z\left(n'\frac{\Delta x_0}{N}\right) \propto
\mathrm{FFT}^{-1}\left\{\mathrm{FFT}\left[g\left(n\frac{\Delta x_0}{N}\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}\pi\frac{\lambda z}{\Delta x_0^{\,2}}\tilde{n}^2\right)\right\}
\tag{4}
$$

となります．ここで，n，n'，$\tilde{n}$ は整数を表していま

す．式（3），（4）に含まれる位相因子の最高周波数に対してサンプリング定理を満足する伝搬距離 z の条件を求めます．式（3）の g に積算する位相因子においては，

$$z \geq \frac{\Delta x_0{}^2}{\lambda N} \tag{5}$$

となります．したがって，式（3）による計算方法では，不等式（5）を満たさない近方領域において，エリアジング誤差が生じます．さらに，この近方領域においては $\Delta x_z < \Delta x_0$ となるので，回折像の一部分が計算されることになります．回折像の全体が計算できないことを理由として，式（3）の計算方法が近方領域の計算に不向きであるとの説明を目にすることがありますが，それ以前の問題として，エリアジング誤差により，正確な回折像が得られないことに注意が必要です．

式（3）による計算方法では，フーリエ変換演算の後にさらに位相因子を積算します．この位相因子に先ほどと同様にサンプリング条件を当てはめると

$$z \leq \frac{\Delta x_0{}^2}{\lambda N} \tag{6}$$

が得られます．式（3）による計算方法は，回折面の計算領域が伝搬距離に比例して広がることにより，不等式（5）を満たす遠方領域において回折像のほぼ全体が計算できます．しかし，遠方領域では，不等式（6）を満たさないことから，計算された回折像の位相分布は不正確です．回折像の振幅分布はおおむね正しい結果が得られます．

続いて，式（4）に含まれる位相因子の最高周波数にサンプリング条件を当てはめると，式（6）と同じ条件が得られます．したがって，式（4）による計算方法では，不等式（6）を満たす近方領域において，計算精度の高い回折像が得られます．ただし，フレネル回折像は，伝搬距離が小さくなると放物面近似に起因した誤差により，フレネル・キルヒホッフの回折式から得られる回折像との差異が目立つようになります．この問題を解決するためには，角スペクトルの伝搬を放物面近似なしに計算する必要があります．また，式（4）による計算方法では，不等式（6）を満たさない遠方領域において，エリアジング誤差により計算精度が低下します．さらに，回折面の計算領域は伝搬距離によらず一定（$\Delta x_z = \Delta x_0$）なので，回折像が大きくなる遠方領域においては，回折像の一部分のみが計算されることになります．遠方領域において，角スペクトルの伝搬を計算する際に生じるエリアジング誤差を低減するために位相因子の周波数帯域を制限する方法が提案されており[1]，フレネル回折の計算にも有効です．

FFT法を用いるフレネル回折計算において生じる計算精度の問題をサンプリング定理から考察しました．サンプリング定理を満足する条件から，伝搬距離 $z = \Delta x_0{}^2/(\lambda N)$ を境にして2つの計算手法を使い分ける必要性があることをご理解いただけましたでしょうか．2つの計算手法において，伝搬距離が $\Delta x_0{}^2/(\lambda N)$ のとき，計算結果は等しくなります．ここでは紹介できませんでしたが，非整数次フーリエ変換（fractional Fourier transform）を用いた計算方法[2]やシフトフレネル伝搬計算[3]など，各種の有効な計算手法が研究されています．いずれの手法においても，サンプリング定理を満足するようにパラメーターを設定することが大変重要になります．

（職業能力開発総合大学校　高橋　毅）

文　　献

1）松島恭治：“高速畳み込みを用いた伝搬回折計算における帯域制限と可変ピッチ角スペクトル法の検討”，Optics & Photonics Japan 2008 講演予稿集（2008）pp. 324–325.

2）D. Mas, J. Garcia, C. Ferreira, L. M. Bernardo and F. Marinho: “Fast algorithms for free-space diffraction pattern calculation,” Opt. Commun., **164**（1999）233–245.

3）R. P. Muffoletto, J. M. Tyler and J. E. Tohline, “Shifted Fresnel diffraction for computational holography,” Opt. Express, **15**（2007）5631–5640.