Compressed Sensing ～新しい信号復元の枠組み～

Compressed sensing（もしくは compressive sampling）とよばれる新しい信号復元理論の枠組み[1]をご存知でしょうか．これは，対象とする信号を構成する要素がほとんどゼロであるというスパース性を前提として，少ない数の観測データから元の信号を復元するもので，数学的理論に裏打ちされるとともに，さまざまな応用分野への適用が可能なことから，大変な注目を集めています．本稿では，この compressed sensing をご紹介します．

まず，compressed sensing の問題設定を明らかにしましょう．対象とする信号を N 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ とし，$\boldsymbol{x}$ に対する M 個の線形観測 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_M)^T$ が次式により得られたとします．

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x} \quad (1)$$

ここで，$\boldsymbol{\Phi}$ は $M\times N$ の行列です．観測信号 $\boldsymbol{y}$ から元信号 $\boldsymbol{x}$ を復元する問題は，一般に線形逆問題とよばれますが，連立方程式を解くことと同値ですので，$M\geq N$ を満たさなければ正しい解は得られません．ここで，信号 $\boldsymbol{x}$ にスパース性があるとします．つまり，$\boldsymbol{x}$ のほとんどの要素がゼロであり，$K(<M)$ 個の要素だけがゼロでない値をもちます．この前提のもと，$M<N$ であるときの式（1）の逆問題を解くことが，compressed sensing の問題設定となります．ここで注意しなければならないのは，$\boldsymbol{x}$ における非ゼロの K 個の要素の位置も未知である，という点です（もし，非ゼロの要素の位置がわかっていれば，K より大きな M 個観測から $\boldsymbol{x}$ を簡単に復元できてしまいます）．

次に解き方に移りましょう．上記の問題を素直に解こうとすれば，「式（1）を満たし，かつ，$\boldsymbol{x}$ の非ゼロの要素数ができるだけ少ない $\boldsymbol{x}$ を求める」として解くことが考えられます．数学的には，非ゼロの要素の個数として定義される L_0 ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_0$ を用いて，次式の最適化問題として定式化することができます．

$$\text{Minimize } \|\boldsymbol{x}\|_0 \quad \text{Subject to } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x} \quad (2)$$

しかし，この問題は NP ハードとよばれ，$\boldsymbol{x}$ の次元数 N が大きい場合には現実的な計算量では解くことができません．

そこで compressed sensing では，L_0 ノルムの代わりに L_1 ノルム（要素の絶対値の和）を用いるアプローチをとります．つまり，式（2）の代わりに

$$\text{Minimize } \|\boldsymbol{x}\|_1 \quad \text{Subject to } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x} \quad (3)$$

を解くことにします．この問題は，線形計画法のさまざまな解法を適用して解を得ることが可能です．さらに，このようにして得られた解は，L_0 ノルム最小化として得られる解と多くの場合一致するのです．

これを理解するために，図 1 に L_1 ノルム最小化の概念図を示します（N=2，K=1，M=1の場合）．太線は L_1 ノルム一定の条件を表しており，この領域を広げていき，観測条件を満たす点線にぶつかった点が解 $\hat{\boldsymbol{x}}$（○）となります．この図からおわかりのように，L_1 ノルム最小化で得られる解は，多く

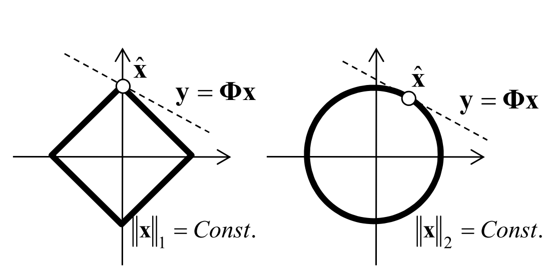

図 1　L_1 ノルム最小化（左）と L_2 ノルム最小化（右）の概念図（N=2，K=1，M=1 の場合）．縦軸と横軸は二次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ の 2 要素に対応し，太線は L_1 ノルムもしくは L_2 ノルム一定の条件を，点線は $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x}$ の条件を，○は得られる解を表す．

の場合，L_0 ノルム最小化で得られるスパースな解（軸上の点）と一致します．図 1 には比較のために，L_2 ノルム最小化の場合も示しました．L_2 ノルム最小化は，信号のパワー（L_2 ノルム）を最小化することでノイズを抑制する効果があることから，線形逆問題でしばしば用いられます．両者を比較すると，ずいぶんと異なる解が得られることがわかるでしょう．

では，compressed sensing はスパースな信号にしか適用できないのでしょうか．答えは，「元信号自身がスパースでなくても，スパースな信号へ線形変換可能であれば適用可能」となります．画像信号は，ウェーブレット変換や周波数変換により，高周波成分がほとんどゼロのスパースな信号へ変換できることから，このような変換と組み合わせて compressed sensing が適用されています．

次に，compressed sensing による信号復元を試してみた結果を紹介します（図 2）．$\boldsymbol{x}$ の次元数は $N=500$ で，非ゼロの要素数は $K=15$，$\boldsymbol{y}$ の次元数は $M=75$，観測行列 $\boldsymbol{\Phi}$ はランダムな値で構成しました．L_1 ノルム最小化にはフリーの MATLAB ライブラリ[2] を用いました．比較のために，式（3）の $\|\boldsymbol{x}\|_1$ を $\|\boldsymbol{x}\|_2$ に置き換えた L_2 ノルム最小化の結果も算出しました．結果をみますと，L_2 ノルムではほとんど正しく推定できていないのに対し，確かに L_1 ノルムを用いることで，ほぼ正確に解が求められています．また，観測データにノイズをのせても，解が大きく変わることはありませんでした．

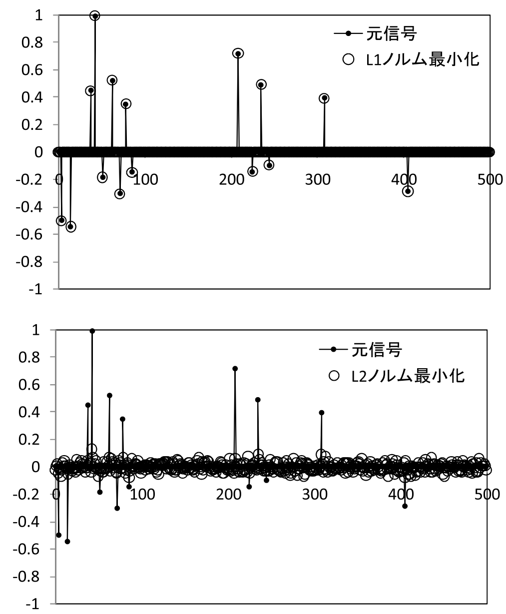

図 2　スパース信号復元の例．L_1 ノルム最小化（上），L_2 ノルム最小化（下）．

本稿では，compressed sensing の難しい理論には立ち入らず，直観的に理解しやすいエッセンスだけをお伝えしました．実際には，どのような条件のときに正しい解が得られるのか，$\boldsymbol{\Phi}$ をどのように設計すればよいのか，などのさまざまな理論的研究がなされています．一方，極限まで観測数を減らしたイメージングや，劣化した波形・画像信号の復元などの各種応用に関しても，多くの論文が発表されています．機会があれば，新しくて奥深い compressed sensing の世界をのぞかれてはいかがでしょうか．

（東京工業大学　村上百合）

文　　献

1）E. J. Candes and M. B. Wakin: "An introduction to compressive sampling," IEEE Signal Process. Mag., **25** (2008) 21–30.

2）CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, http://cvxr. com/cvx/