

ローレンツ関数は光学のいろいろな場面で使われます。ただし、その現れ方は場面によって少しずつ異なるので、注意が必要です。ここでは、複素ローレンツ関数が片側指数関数のフーリエ変換であることに注目しながら、いくつかの例を挙げて複素ローレンツ関数に関連する現象を概観したいと思います。

### 1. 片側指数関数

まず、図1 (a) (i) に示す片側指数関数

$$s(t) = \begin{cases} \exp(-t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

を考えましょう。そのフーリエ変換  $S(\omega)$  は

$$S(\omega) = \int s(t) \exp(i\omega t) dt = \frac{1+i\omega}{1+\omega^2} \quad (2)$$

ですから、 $S(\omega)$  は実部が対称、虚部が反対称な複素ローレンツ関数です (図1 (a) (ii))。また、 $\omega = 0$  において  $S(\omega)$  は実数ですが、 $\omega$  が大きくなると、実部が  $\omega^{-2}$ 、虚部が  $\omega^{-1}$  に漸近し、虚部が支配的になります。したがって位相特性  $\arg S(\omega)$  は図1 (a) (iii) のように  $\pi/2$  の位相シフトを伴います。

片側指数関数を用いる典型例のひとつが電子回路のローパスフィルター (LPF) であり、 $s(t)$  がインパルス応答、 $S(\omega)$  が周波数応答になります。(ただし、LPF のカットオフ周波数に応じて式 (1) (2) を適切にスケールリングする必要があります。) 以下では、 $S(\omega)$  が少しずつ形を変えて現れる現象をみてみましょう。

### 2. 片側指数関数×正弦波

ばね振り子などの振動子に対しインパルスの力を与えると、振動子は力積に応じた初速度を得て、その後減衰振動します。したがって、振動子の位置のインパルス応答  $g(t)$  は、比例定数を無視すると

$$g(t) \propto s(t) \sin \omega_0 t \quad (3)$$

と表せます (図1 (b) (i))。ここで  $\omega_0$  は振動子の共振周波数です。 $g(t)$  のフーリエ変換  $G(\omega)$  は振動子の周波数応答となります。ここで、 $\sin \omega_0 t$  のフーリエ変換は、 $\delta(\omega)$  をデルタ関数として

$$i\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (4)$$

ですから、 $G(\omega)$  は

$$G(\omega) \propto i\pi \{S(\omega - \omega_0) - S(\omega + \omega_0)\} \quad (5)$$

となります。したがって、 $\omega = \pm \omega_0$  の2か所

$S(\omega)$  が  $G(\omega)$  の虚部に畳み込まれ (図1 (b) (ii))、 $S(\omega)$  と  $G(\omega)$  で実部と虚部が入れ替わります。これは、振動子のインパルス応答が  $\sin$  型であることに由来します。

誘電体の光学特性に関するローレンツモデルでは、分極の周波数依存性が  $G(\omega)$  の形で表せると仮定します。このとき、電場と同相で振動する分極 ( $\text{Re } G(\omega)$  に比例) が屈折に寄与し、 $\pi/2$  遅れで振動する分極 ( $\text{Im } G(\omega)$  に比例) が吸収に寄与すると考えます。ここで、 $G(\omega)$  において  $S(\omega)$  が  $\omega = \pm \omega_0$  の2か所に畳みこまれていることは留意すべき点です。 $\omega = 0$  付近の  $G(\omega)$  の実部には  $S(\omega - \omega_0)$  と  $S(\omega + \omega_0)$  が同程度に寄与します。一方、 $\omega$  が  $\omega_0$  に近づくほど前者の寄与が大きくなり、後者の寄与は相対的に小さくなります。このため、 $\omega \ll \omega_0$  における屈折の影響を考えるときは両方の項を考慮するのに対し、 $\omega \sim \omega_0$  における吸収および屈折を考えるときは、多くの場合、

$$G(\omega) \propto iS(\omega - \omega_0) \quad (6)$$

という近似を行います。

また、量子力学において基本となる二準位系の集団は、準位間のエネルギー差を  $\hbar\omega_0$  とすると、微小な摂動に対して式 (5) と同じ周波数応答を有します<sup>1)</sup>。なお、 $\omega \sim \omega_0$  のときは回転波近似とよばれる手法を用いて解析しますが、これは式 (6) と同じ結果を与えます。また、系が励起状態にある場合、 $g(t)$  および  $G(\omega)$  の正負が反転します。これによって  $\omega \sim \omega_0$  において負の吸収 (誘導放出) が生じます。

### 3. 片側指数関数×コム関数

2枚のミラーにより構成されるファブリー・ペロー (FP) 干渉計にインパルスの光を入射すると、透過光は指数減衰する多重反射光となります (図1 (c) (i))。したがって、FP干渉計のインパルス応答  $f(t)$  は  $s(t)$  とコム関数の積で表されます。そのフーリエ変換  $F(\omega)$  が周波数応答となり、これは  $S(\omega)$  とコム関数の畳み込みであるため、 $S(\omega)$  が周期的に現れます (図1 (c) (ii))。

一方、反射波のインパルス応答  $r(t)$  は、入射側ミラーからの強い反射を含みます (図1 (d) (i))。ここで、入射側ミラーからの反射と多重反射光が逆

符号となるのは固定端反射と開放端反射の違いによるものです。  $\delta(t)$  のフーリエ変換が定数であることに留意すると、  $r(t)$  のフーリエ変換  $R(\omega)$  は、  $F(\omega)$  にオフセットを与えたものであることがわかります (図1 (d) (ii))。 このため、  $2\pi/T$  の整数倍の周波数 (共振周波数) において反射波が消失します。 また、共振周波数の周辺では、  $\text{Im } R(\omega)$ 、すなわち  $\pi/2$  の位相シフトを伴う反射波の振幅が線形に変化します。 これを巧みに検出して干渉計とレーザーの共振を制御する方式は Pound-Drever-Hall 法として知られています。

干渉計の一方のミラーの反射率を 100% としたものは、Gires-Tournois (GT) 干渉計とよべます。 FP 干渉計では多重反射光が入射端・射出端の両方から散逸するのに対し、GT 干渉計では多重反射光は入射端のみから散逸します。 このために、GT 干渉計では、周波数特性  $D(\omega)$  における複素ローレンツ関数の振幅が  $R(\omega)$  と比較して倍増します (図1 (e) (ii))。 その位相特性 (図1 (e) (iii)) をみますと、共鳴周波数の低周波側では下に凸 (正常分散)、高周波側では上に凸 (異常分散) となります。 この位相特性は光パルスのチャープ補償に用いることができます。

#### 4. 片側指数関数の波数分布—ガウシアンビーム

最後にガウシアンビームについて考えましょう。 ビームの伝搬方向を  $z$  とすると、ガウシアンビームはさまざまな波数  $k_x, k_y$  を有する平面波を二次元ガ

ウシアンを重ね付けで重ね合わせたものです。 ここで、  $k_z$  の分布  $E(k_z)$  を考えます。  $k_0 = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  は波長) とし、近軸近似のもとで  $k_z = k_0 - (k_x^2 + k_y^2)/2k_0$  の関係を用いると、  $E(k_z)$  が片側指数関数であることを示せます (図1 (f) (i))<sup>2)</sup>。  $E(k_z)$  の空間領域へのフーリエ逆変換を  $e(z)\exp(ik_0z)$  とすると、これがビーム中心の複素電界の空間分布であり、  $e(z)$  は複素ローレンツ関数になります (図1 (f) (ii)) (ただし、片側指数関数の向きを反映し、  $\text{Im } e(z)$  の符号は  $S(\omega)$  とは逆になります)。 また、ビームウエストの前後では  $\pm\pi/2$  の位相変化が生じます (図1 (f) (iii))。 これは Gouy 位相シフトとよばれ、非線形光学等で考慮すべき重要な効果です。

ここに挙げた以外にも複素ローレンツ関数はさまざまな光学現象に現れますが、そのフーリエ変換である片側指数関数に着目すると物理描像を直感的に把握しやすいと考え、いくつかの例を紹介しました。 なお、本稿の議論は非常にラフであり、正確な理解には丁寧な計算が必要であることを付記します。  
(大阪大学 小関泰之)

#### 文 献

- 1) R. W. Boyd: *Nonlinear Optics* (Academic Press, 2003).
- 2) K. Itoh, W. Watanabe and Y. Ozeki: "Nonlinear ultrafast focal-point optics for microscopic imaging, manipulation, and machining," *Proc. IEEE*, **97** (2009) 1011-1030.

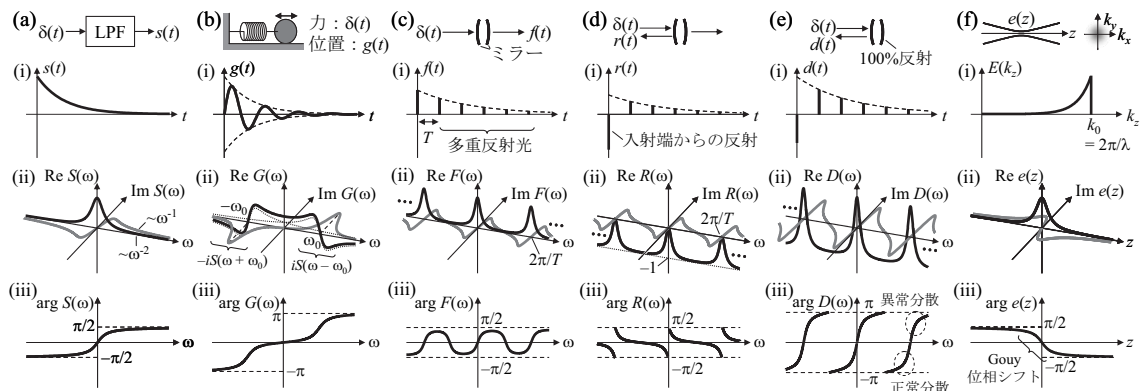


図1 (a) LPF, (b) 振動子, (c) FP 干渉計の透過光, (d) FP 干渉計の反射光, (e) GT 干渉計, (f) ガウシアンビームに現れる片側指数関数 (i) とそのフーリエ変換である複素ローレンツ関数の複素振幅 (ii) および位相特性 (iii)。 (ii) では実部を黒色、虚部を灰色の実線で表す。なお、図を見やすくするため、スケールは一定でない。