■光学工房

光フィルターとクラマース・クローニッヒの関係

ファブリー・ペロー（FP）干渉計に光を入射して透過光を測定すると，その振幅–位相特性はクラマース・クローニッヒの関係（KKR）を満たします．つまり，十分広い波長域において振幅特性がわかれば，位相特性，すなわち分散特性が一意に求まります．しかし同じ FP 干渉計でも，反射光に関しては，振幅–位相間の KKR が成り立たないことがあります．同様に，非対称マッハ・ツェンダー（MZ）干渉計や回折格子も，振幅–位相間の KKR を満たしません．KKR を満たす光フィルターと満たさない光フィルターがあるのはなぜでしょうか．その違いと物理的な意味について，紐解いてみたいと思います．

1. クラマース・クローニッヒの関係（KKR）

KKR は，線形な物質の複素屈折率の実部と虚部を結びつける関係式としてよく知られていますが，もともと「因果律」から導かれる普遍的な法則であり，任意の線形系の伝達関数に対して成り立ちます．一般に，ある線形系の伝達関数が $H(\omega)=R(\omega)+\mathrm{i}X(\omega)$ と表されるとき，実部 $R(\omega)$ と虚部 $X(\omega)$ は，以下の KKR を満たします．

$$\begin{cases} R(\omega)=\dfrac{1}{\pi}P.V.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{X(\omega')}{\omega-\omega'}\mathrm{d}\omega' \\ X(\omega)=-\dfrac{1}{\pi}P.V.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{R(\omega')}{\omega-\omega'}\mathrm{d}\omega' \end{cases} \qquad (1)$$

まず，上式を「因果律」から導出してみましょう．因果律とは，「入力よりも前に系が応答することはない」，すなわち「系のインパルス応答 $h(t)$ が $t\leq 0$ において $h(t)=0$ であること」を意味し，すべての受動的な線形系について成り立つ，ごく当たり前の性質です．この条件を数学的に表すと，

$$h(t)=\mathrm{sgn}(t)\cdot h(t) \qquad (2)$$

と書くことができます．ただし，符号関数 $\mathrm{sgn}(t)$ は，

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases} 1 & (t>0) \\ 0 & (t=0) \\ -1 & (t<0) \end{cases} \qquad (3)$$

と定義されます．式（2）の両辺をフーリエ変換し，畳み込み定理，および，$\mathrm{sgn}(t)$ のフーリエ変換が $2/(\mathrm{j}\omega)$ になることを用いると，次式が得られます．

$$H(\omega)=-\frac{\mathrm{j}}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(\omega')}{\omega-\omega'}\mathrm{d}\omega' \qquad (4)$$

式（4）の実部と虚部にそれぞれ注目すると，式（1）と等価であることがわかります．

以上より，KKR は物質の複素屈折率に限定した性質ではなく，任意の受動的な線形系に対して，伝達関数の実部と虚部の間に成り立つ普遍的な関係であることがわかります．したがって当然，光フィルターも KKR を満たすはずです．しかしそうなると，冒頭で挙げた例のように，「KKR を満たさない光フィルターがある」とはどういうことでしょうか．

答えは簡単です．光フィルターの振幅と位相は，$\ln[H(\omega)]$ の実部と虚部であって，$H(\omega)$ の実部と虚部ではないということです．それでは，$\ln[H(\omega)]$ の実部と虚部にはどのような関係があるのでしょうか．

2. 振幅–位相間の KKR

いま，$H(\omega)=\exp(-L-\mathrm{i}\Phi)$ と表し，$G(\omega)=-\ln[H(\omega)]$ と定義すると，$G(\omega)=L(\omega)+\mathrm{i}\Phi(\omega)$ となります．もし $G(\omega)$ が全周波数にわたって有限かつ連続であれば（より正確には，$G(\omega)$ が絶対可積分であれば），$G(\omega)$ のフーリエ変換 $g(t)$ が計算できます．これまでは「周波数 ω の入力信号に対して $H(\omega)$ で表される応答をする系」としてこの線形系を記述していましたが，「周波数 ω の入力信号に対して $G(\omega)$ で表される“仮想的な分極”が発生し，その結果として，$H(\omega)=\exp[-G(\omega)]$ の応答が生じる」と考えても何ら問題ないはずです．そう考えると，仮想的な分極のインパルス応答 $g(t)$ も，当然，因果律を満たす必要があり，$G(\omega)$ の実部 $L(\omega)$ と虚部 $\Phi(\omega)$ の間に式（1）が成立します．FP 干渉計の透過光に対しては，このような仮想的な分極が定義できるため，振幅–位相間の KKR が満たされます．ただし，光フィルターの種類によっては，$G(\omega)$ が絶対可積分でないため，$g(t)$ が定義できないものもあります．その一例が FP 干渉計の反射特性や非対称 MZ 干渉計であり，その結果として，振幅–位相間の KKR が満たされなくなってしまうのです．

一般に，$G(\omega)$ が絶対可積分であるためには，複素周波数空間の上半分で $G(\omega)$ が極をもたない，つ

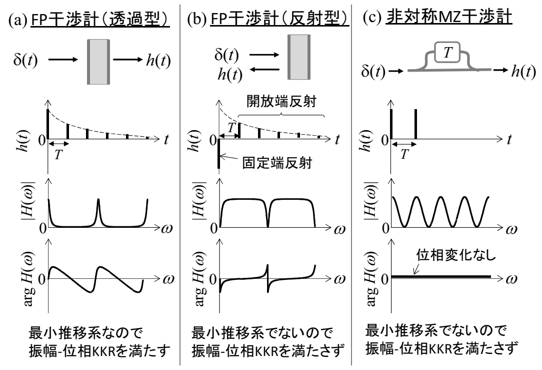

図1　ファブリー・ペロー干渉計の透過光（a），反射光（b），およびマッハ・ツェンダー干渉計（c）のインパルス応答と振幅–位相特性.

まり複素周波数を $\omega+\mathrm{i}\varepsilon$ として，$\varepsilon\geq 0$ の範囲において $G(\omega+\mathrm{i}\varepsilon)$ が発散しないことが条件になります．ここでは，$G=-\ln(H)$ なので，$H=0$ のときにも G は発散してしまいます．つまり，上の条件は，$\varepsilon\geq 0$ の範囲において $H(\omega+\mathrm{i}\varepsilon)$ が0にならないこと，といいかえることができます．一般に，このような条件を満たすとき「H は最小位相推移系である」といいますが，光フィルターについても，最小位相推移系のもののみ，振幅–位相間のKKRが成り立つのです．

3.　最小位相推移でない系とはどういう系なのか

H が最小位相推移系ではないとき，$H(\omega'+\mathrm{i}\varepsilon')=0$ となる非負の値 ε' と ω' が存在することになります．つまり，$\exp(\mathrm{i}\omega' t-\varepsilon' t)$（ただし $\varepsilon'\geq 0$）で表される信号を入力したときに出力が0になる，そんな ε' と ω' が存在するということです．そんなことはあり得るのでしょうか．

厳密な議論をするには，H を計算して零点の位置を確認する必要がありますが，インパルス応答の形を想像するだけでもイメージをつかむことができます．例えば，FP干渉計の透過光について考えると，インパルス応答は，図1（a）のように単調に減少するパルス列になります．この場合，$t=0$ におけるピークを完全に打ち消すことができないため，出力を0にするような入力信号は存在しないことが直観的に理解できます．一方，反射光のインパルス応答は図1（b）のようになります．この場合は，$t=0$ におけるピークがエタロンの入力側で反射した成分なので固定端反射であるのに対して，それ以降のパルス列は，エタロン内部で反射した成分なので開放端反射であり，逆符号になるのがポイントです．そのため，うまく ε' と ω' を選べば，出力を0にできそうな気がします．実際，$\varepsilon'=0$，$\omega'=2\pi m/T$（m は整数）のときに出力が0になるため，H は最小位相推移系でないことが確認できます．最後に，図1（c）のような非対称MZ干渉計の場合は，2個のパルスからなるインパルス応答になるので，$\varepsilon'=0$，$\omega'=\pi(2m+1)/T$（m は整数）として2つのパルスによる畳み込みを逆位相にすることで，出力を0にすることができます．より一般的に，回折格子を用いた分光器やアレイ導波路回折格子（AWG）など，インパルス応答が有限個のパルス列で表されるものについては同じことがいえ，最小位相推移系でないことがわかります．さらにこの場合，インパルス応答が有限時間内に収まっているので，時間軸に対して対称にすることが可能であり，図1（c）に示すように波長分散の全くない光フィルターが実現できます．

最後にもうひとつ．最小位相推移でない光フィルターの位相特性を簡単に測定するにはどうしたらいいでしょうか．ひとつの方法として，測定したい光フィルターに干渉計を追加してインパルス応答の先頭に大きなピークをつけ加えることで，全体として最小位相推移系に変身させるという手法が提案されています[1)]．全体の振幅特性のみを測定すれば，KKRを用いて位相特性が求まり，追加した干渉計の寄与を差し引くことで，元の光フィルターの位相特性がわかるという仕組みです．光フィルターひとつとっても，なかなか奥深いものです．

（東京大学　種村拓夫）

文　献

1）A. Mecozzi: “Retrieving the full optical response from amplitude data by Hilbert transform,” Opt. Comm., **282** (2009) 4183–4187.