■光学工房

強度行列理論の紹介

本稿では，フーリエ結像理論定式化のひとつである強度行列理論[1-4]を概説する．この理論は1950年代後半に蒲生秀也氏により提案され，結像計算へのサンプリング定理の明示的な適用を特徴とする．強度行列理論は，Abbe および Hopkins により構築された定式化と等価である．誌面節約の都合上，本稿に用いる表記を下表に掲載する．

波数	$k=2\pi/\lambda$
照明瞳座標	$\boldsymbol{\ell}_s=(\xi_s, \eta_s)$
物および像面座標（実空間）	$\boldsymbol{r}=(x, y)$
瞳座標（フーリエ空間）	$\boldsymbol{\ell}=(\xi, \eta)$
照明瞳（光源強度分布）	$S(\boldsymbol{\ell}_s)$
物体振幅（美空間）	$T(\boldsymbol{r})$
物体振幅（フーリエ空間）	$\tilde{T}(\boldsymbol{\ell})$
瞳関数（フーリエ空間）	$G(\boldsymbol{\ell})$
フーリエ変換演算子	$\mathcal{F}[\cdots]$
コンボリューション演算子	$*$

照明瞳上点光源$\boldsymbol{\ell}_s$からの斜入射照明により形成される像面上での光振幅$U(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\ell}_s)$は，

$$U(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\ell}_s)=\mathcal{F}[G(\boldsymbol{\ell})\tilde{T}(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\ell}_s)]\equiv\mathcal{F}[U(\boldsymbol{\ell};\boldsymbol{\ell}_s)] \quad (1)$$

である．Abbe の部分コヒーレント理論に従い，照明瞳上にわたり光強度和を算出する．

$$I(\boldsymbol{r})=\int d^2\boldsymbol{\ell}_s S(\boldsymbol{\ell}_s)|U(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\ell}_s)|^2 \quad (2)$$

物面の周波数情報は，フーリエ変換により像面まで伝達される際に開口による帯域制限を受ける．ゆえに，ある照明瞳上の点光源 ($\boldsymbol{\ell}_s$) による像面上での光振幅関数に対してサンプリング定理を適用できる．

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\ell}_s)&=\mathcal{F}[U(\boldsymbol{\ell};\boldsymbol{\ell}_s)]\\&=\mathcal{F}[\{U(\boldsymbol{\ell};\boldsymbol{\ell}_s)*\mathrm{comb}_{W_\xi}^{W_\eta}(\boldsymbol{\ell})\}\theta(\boldsymbol{\ell})]\\&=\{\mathcal{F}[U(\boldsymbol{\ell};\boldsymbol{\ell}_s)]\cdot\mathcal{F}[\mathrm{comb}_{W_\xi}^{W_\eta}(\boldsymbol{\ell})]\}*\mathcal{F}[\theta(\boldsymbol{\ell})]\end{aligned} \quad (3)$$

ただし，フーリエ空間での二次元くし関数および二次元窓関数$\theta(\boldsymbol{\ell})$を次のように定義する．

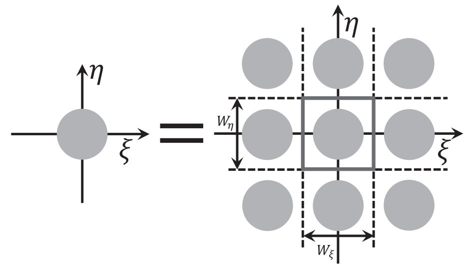

図1　フーリエ空間における式（3）イメージ．くし関数によりフーリエ空間内での周期性を与える代わりに，窓関数により領域を制限する．

$$\mathrm{comb}_{W_\xi}^{W_\eta}(\boldsymbol{\ell})=\sum_{m,n}\delta(\xi-mW_\xi)\delta(\eta-nW_\eta) \quad (4)$$

$$\theta(\boldsymbol{\ell})=\begin{cases}1 & \boldsymbol{\ell}\in[-W_\xi, W_\xi]\times[-W_\eta, W_\eta]\\0 & (\text{otherwise})\end{cases} \quad (5)$$

フーリエ空間における式変形イメージを図1に掲載する．帯域制限によりフーリエ空間内に局在した関数をくし関数にて周期的に拡張する代わりに，窓関数を導入して定義域を制限している．

式（3）に対してさらに計算を進めるために，フーリエ空間にて表現されたくし関数および窓関数のフーリエ変換を実行する．

$$\begin{aligned}\mathrm{comb}_{L_x}^{L_y}(\boldsymbol{r})&\equiv\mathcal{F}[\mathrm{comb}_{W_\xi}^{W_\eta}(\boldsymbol{\ell})]\\&=\sum_{m,n}\mathcal{F}[\delta(\xi-mW_\xi)\delta(\eta-nW_\eta)]\\&=\frac{1}{L_xL_y}\sum_{m,n}\delta(x-mL_x)\delta(y-nL_y)\end{aligned} \quad (6)$$

ここで，$L_x=\pi/kW_\xi$ および $L_y=\pi/kW_\eta$ は，実空間でのサンプリング間隔に相当する．さらに，実空間表現二次元窓関数を次のように導出する．

$$\mathcal{F}[\theta(\boldsymbol{\ell})]=\frac{\sin(kW_\xi x)}{kW_\xi x}\frac{\sin(kW_\eta y)}{kW_\eta y} \quad (7)$$

以下，天下り的だがx方向基底関数を

$$\psi_m(x)=\frac{1}{L_x}\frac{\sin[kW_\xi(x-mL_x)]}{kW_\xi(x-mL_x)} \quad (8)$$

と定義する．y方向基底関数$\psi_m(y)$も同様である．

式（1），（6），（7）を式（3）に代入すれば，

$$
\begin{aligned}
&\{\mathcal{F}[U(\boldsymbol{\ell};\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}})]\cdot\mathcal{F}[\mathrm{comb}^{W_\eta}_{W_\xi}(\boldsymbol{\ell})]\}*\mathcal{F}[\theta(\boldsymbol{\ell})]\\
&=\left[U(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}})\cdot\frac{1}{L_xL_y}\sum_{m,n}\delta(x-mL_x)\,\delta(y-nL_y)\right]\\
&\quad *L_xL_y\psi_0(x)\psi_0(y)\\
&=\sum_{m,n}U(mL_x,nL_y;\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}})\psi_m(x)\psi_n(y)\\
&=[U(mL_x,nL_y;\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}})]\,|\psi(x)\psi(y)\rangle
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となり，二次元サンプリング定理を明示的に表現している．ここで，第1論文[1]に従って量子力学にて利用されているブラケット表記を採用した．最後に，式（2）に代入し照明瞳に関して積分を実行する．

$$I(\boldsymbol{r})=\langle\psi(x)\psi(y)|\hat{\rho}|\psi(x)\psi(y)\rangle \tag{10}$$

ただし，行列 $\hat{\rho}$ の要素は照明瞳積分を含み

$$\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}}S(\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}})\,U^{\dagger}(m'L_x,n'L_y;\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}})\,U(mL_x,nL_y;\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{s}})$$

と定義される．この二次元行列 $\hat{\rho}$ が強度行列であり，結像という光学現象を特徴付けるすべての情報（光源，物体振幅，瞳関数）を内包している．

強度行列第1の特徴は，正値エルミート行列となることである．この性質は光強度の非負性に起因しており，観測量をエルミート行列にて表現する量子力学と類似性を有する．エルミート行列は必ず対角化可能であるので，光強度関数をユニタリー行列 $\hat{C}$ を用いてスペクトル分解できる．

$$I(\boldsymbol{r})=\sum_i\Lambda_i\,|\hat{C}_i^{-1}|\psi(x)\psi(y)\rangle|^2 \tag{11}$$

ただし，$\hat{C}_i^{-1}$ は，$\hat{C}^{-1}$ の i 番目行ベクトルである．強度行列第2の特徴は，その対角和が像面での光強度の全和と一致することである．

$$(\text{全強度})\equiv\int\mathrm{d}^2r I(\boldsymbol{r})\propto\mathrm{Tr}[\hat{\rho}] \tag{12}$$

証明は sinc 関数の直交性による．

窓関数の選択自由度と収差の存在する光学系への応用について触れておく．上記定式化は，エイリアシングの発生しない窓形状であれば，常に成立する．ただし，ナイキスト周波数を超えるサンプリングの場合は，各点が独立でないため，強度行列は冗長となる．実際の光学系を想定して，第2[2]および第4[4]論文では円形開口に対するサンプリング定理そして強度行列理論が報告されている．収差残存下光学系における強度行列取り扱いは，第3論文[3]にある．

強度行列の固有値 $\{\Lambda_i\}$ 分布は，結像計算におけるコヒーレンス度と関係があると「考えられて」いる．式（11）が，強度 Λ_i を有する点光源からの光強度和とみなせることによる．なお，ここでのコヒーレンス度は強度行列より計算されるエントロピー

$$S\equiv-\sum_i(\Lambda_i/\mathrm{Tr}[\hat{\rho}])\log(\Lambda_i/\mathrm{Tr}[\hat{\rho}]) \tag{13}$$

から計算され[1]，結像に寄与する“実効的な点光源数”と解釈できる．物理量 S は，コヒーレント結像の場合に0となりインコヒーレント結像の場合に最大値となる．実際，コヒーレント照明での一次元瞳を仮定し，開口近傍を一次回折光が通過する三光束干渉での cos 波における強度行列を計算すれば，非零な固有値が1つなので，$S=0$ となる．

サンプリングとコヒーレンス度の関係を含め，情報理論からの結像に対する研究は，いまだ発展の余地のある領域である．本稿が，当該分野の活性化に寄与すれば幸いである．

（(株)ニコン　屋敷　賢）

文　献

1）蒲生秀也：“照明のコヒーレンス性を考慮した光学像の強度分布に関する理論”，応用物理，**25**（1956）431–443.
2）蒲生秀也：“円形開口による像に対するサンプリング定理とその数値計算への応用”，応用物理，**26**（1957）102–114.
3）蒲生秀也：“光学系の強度マトリツクスの瞳による変換”，応用物理，**26**（1957）414–421.
4）蒲生秀也：“円形開口による像のための強度マトリックス”，応用物理，**27**（1958）577–584.