

# 粒子分散型光学材料における多重散乱の解析

森 太 省

## Multiple Scattering by Particle Dispersed Composite Material

Taisei MORI

In optical elements made by particle-distributed materials, light scattering may become an issue. I have derived an analytical solution to describe multiple light scattering by small dielectric spheres, and verified its validity by comparing with the extreme case of T-matrix method. Then, I show that the analytical solution is applicable to the analyses of large-sized optical elements.

**Key words:** particle, T-matrix, multiple scattering, GI, Gradient Index

粒子分散型光学材料は、通常の硝材では実現できない新たな特性をもたせることができるため注目されている。しかし、分散させた粒子によって光が散乱してしまう。その結果、例えば粒子分散型光学材料を撮像光学系に組み込んだ場合に、その散乱光がフレアとなって画質が劣化するという問題が生じる。このため、粒子分散型光学材料を光学素子に適用するには、粒子による光の散乱を制御する技術が必要となる。よって粒子による光の多重散乱を見積もるための手法が必要となる。

従来、粒子による光の多重散乱計算に用いられていた T-matrix 法<sup>1)</sup>では、計算コストの制限から小さい領域でしか計算を行えない。また、粒子配置変更によるアンサンブル平均も数値的に繰り返し計算をする必要があるため、限られた粒子配置変更回数でしか計算を行えない。その結果、粒子分散型光学材料を想定した大きな領域に分散された多数の粒子による光の多重散乱の計算ができない。これにより散乱角度分布を精度よく計算できないという課題があった。この課題を解決するために、粒子が散布されている領域を進行する有効場を T-matrix 法に導入することにより解析解を導出した。有効場を導入することで粒子間の光の多重散乱を平均値として考慮することができる<sup>2)</sup>。本解説では、解析解の各項のもつ意味を定性的・定量的に把握する。また、計算結果を T-matrix 法と比較してその差異の物理的意味を明らかにする。これにより解析解の正当性を

確認し、粒子分散型光学材料を想定した大きな領域に分散された多数の粒子による光の散乱解析に解析解を適用できることを検証する。

### 1. 解析モデルの前提条件

以下に挙げる前提条件の下で解析モデルを設定し(図1)、解析解を導出した。

- ・球形粒子はランダムに分散されていて、変形や凝集などは起こらない。
- ・入射波  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  は  $z$  方向に伝搬する振幅 1 の直線偏光平面波とする。
- ・簡単のため粒子分散型材料は入射波の進行方向 ( $z$  方向) に高さをもった円柱であるとし、円柱の高さを粒子分散型材料の媒質厚  $l$ 、円柱の直径を粒子分散型材料の媒質幅  $d$  とする。
- ・簡単のため粒子分散型材料の母材と外界の屈折率は等しいとし、両者の界面での散乱波の屈折を考慮しない。
- ・簡単のため散乱波は無限遠方での振る舞いを扱う。

### 2. 解析解の導出

粒子分散型光学材料内のすべての粒子からの散乱波は粒子数  $N$  を用いて  $\mathbf{E}^{\tau}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i^{\tau}(\mathbf{r})$  で表される。ここで、 $\mathbf{r}$  は位置ベクトル ( $r = |\mathbf{r}|$ )、 $\mathbf{E}_i^{\tau}$  は  $\tau$  番目の粒子配置における

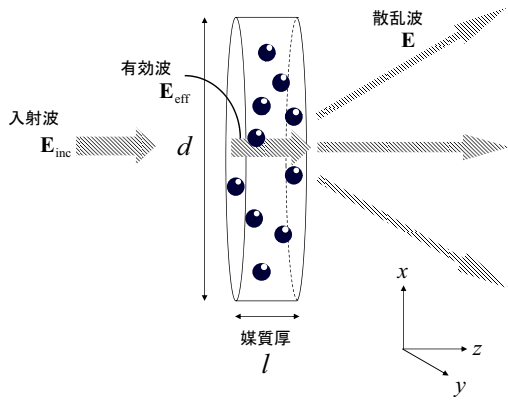


図1 粒子散乱解析モデル.

$i$  番目の粒子の単粒子による散乱波,  $N$  は粒子数を表す. このとき, 微分散乱断面積  $I_s(\mathbf{r})$  と散乱断面積  $P_s$  を次式で定義する.

$$I_s(\mathbf{r}) = \frac{r^2}{S} \frac{1}{N_r} \sum_{\tau=1}^{N_r} |\mathbf{E}^\tau(\mathbf{r})|^2 \quad (1)$$

$$P_s = \int_{4\pi} d\Omega I_s(\mathbf{r}) \quad (2)$$

ここで  $S(= \pi(d/2)^2)$  は入射波が入射する粒子分散型光学材料の面の面積である.  $N_r$  は粒子配置変更回数 ( $N_r \gg 1$ ) であり, 例えば粒子分散型光学材料の生産個体数だと考えることができる. つまり, 粒子配置変更による平均値 (アンサンブル平均) を取ることににより個体によるばらつき (特定の粒子配置に依存する散乱) は対象としない.  $d\Omega$  は微小立体角である.

T-matrix 法によれば, 球ベクトル関数を用いることにより, 入射波  $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ , 単粒子による散乱波  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  をそれぞれ式 (3), 式 (4) で表すことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0 e^{i n_c k z} \\ &= \sum_{m,n} \left[ a_{mn}^{\text{inc}(M)} Rg\mathbf{M}_{mn}(n_c k \mathbf{r}) + a_{mn}^{\text{inc}(N)} Rg\mathbf{N}_{mn}(n_c k \mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{m,n} \left[ a_{mn}^{(M)} \mathbf{M}_{mn}(n_c k \mathbf{r}) + a_{mn}^{(N)} \mathbf{N}_{mn}(n_c k \mathbf{r}) \right] \\ &\approx \frac{e^{i n_c k r}}{n_c k r} \sum_{m,n} \gamma_{n,m} \left[ i^{-n-1} a_{mn}^{(M)} \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) + i^{-n} a_{mn}^{(N)} \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \right] \\ &\equiv \frac{e^{i n_c k r}}{n_c k r} \mathbf{A}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,  $\mathbf{E}_0$  は入射波の振幅ベクトル ( $|\mathbf{E}_0| = 1$ ),  $n_c$  は母材の屈折率,  $k$  は真空中での波数,  $(\theta, \phi)$  は散乱角 (それぞれ  $\mathbf{r}$  の極角と方位角) である. また,  $Rg\mathbf{M}_{mn}$ ,  $Rg\mathbf{N}_{mn}$ ,  $\mathbf{M}_{mn}$ ,  $\mathbf{N}_{mn}$  は球ベクトル関数であり,  $\mathbf{C}_{mn}$ ,  $\mathbf{B}_{mn}$  はそれぞれ  $\mathbf{M}_{mn}$ ,  $\mathbf{N}_{mn}$  の無限遠方極限での角度依存成分である.  $m, n$  は球ベ

クトル関数の展開項数であり, 係数  $\gamma_{n,m}$  はそれらに依存する. 一般に, T-matrix 法によると入射波と散乱波の球ベクトル関数による展開係数を並べた列ベクトル  $\mathbf{a}_{\text{inc}}$  と  $\mathbf{a}$  には式 (5) の関係がある.

$$\mathbf{a} = T \mathbf{a}_{\text{inc}} \quad (5)$$

ここで,  $T$  は T-matrix で粒子半径  $a$ , 粒子の屈折率  $n_s$ , 母材の屈折率  $n_c$ , 波長  $\lambda (= 2\pi/k)$  に依存する. 次に粒子が散布されている領域 (以下媒質とよぶ) を入射波と同方向に伝搬する平面波を有効場として式 (6) で定義する.

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \frac{2n_c}{n_c + n_{\text{eff}}} \mathbf{E}_0 e^{i n_{\text{eff}} k z} \quad (6)$$

ここで,  $n_{\text{eff}}$  は媒質の有効屈折率であり, 式 (7) で表される. これは QCA (quasi-crystalline approximation)<sup>3)</sup> 等により導出される. また, 後方に伝搬する有効場は前方に伝搬するものと比べて小さいので無視する.

$$n_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1+2fy}{1-fy} + i2(ka)^3 y^2 \frac{f(1-f)^4}{(1-fy)^2(1+2f)^2}} \quad (7)$$

$$y = \frac{n_s^2 - n_c^2}{n_s^2 + 2n_c^2} \quad (8)$$

$$\frac{4\pi a^3 N}{3V} = f \quad (9)$$

ここで, 粒子体積濃度  $f$  は媒質に対する粒子が占める体積分率,  $V(= Sl)$  は媒質の体積である. 各粒子は式 (6) で表される励起波を受けて散乱波を生じる. 式 (1) に基づいて散乱角  $(\theta, \phi)$  方向の微分散乱断面積を導出すると (10-1) 式が得られる. 式 (10-1) から式 (10-2) への式変形は媒質幅  $d$  が波長に比べて十分に大きいときに成り立つ近似である. 粒子分散型光学材料では媒質幅  $d$  が数 mm ~ 数 cm の大きさのものを対象にしている. これは可視光の波長 ( $\approx$  数百 nm) と比べて十分に大きいため, 精度よく成り立つ近似である. 式 (10-1) の 4 項のうち式 (10-2) に残った第 1 項と第 2 項の和は散乱のインコヒーレント成分であり, 無視された第 3 項と第 4 項は散乱のコヒーレント成分である. また, 式 (10-2) から式 (10-3) への式変形は粒子径が波長に比べて十分に小さいとき (レイリー散乱) に成り立つ近似である. (式 (10) は次頁参照)

ここで,  $\xi_s = k[\text{Re}(n_{\text{eff}})\hat{\mathbf{z}} - n_c \hat{\mathbf{r}}]$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$  は  $z$  方向の単位ベクトル,  $\hat{\mathbf{r}}$  は  $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトル,  $H(p)$  は粒子対確率密度分布関数の三次元フーリエ変換であり, 粒子半径  $a$  と粒子体積濃度  $f$  に依存する. 本解析では粒子対確率密度分布関数に Percus-Yevick 関数<sup>4)</sup> を用いた. 式 (10-3) により粒子半径  $a$  が波長より十分に小さいときには微分散乱断面積は媒質厚  $l$  に比例し, 増えた粒子数に比例して微分散乱断面積も大きくなるのがわかる.

$$I_s(\theta, \phi) = \left| \frac{2\mathbf{A}(\theta, \phi)}{(n_e + n_{\text{eff}})k} \right|^2 \left[ \frac{1 - \exp\{-2\text{Im}(n_{\text{eff}})kl\}}{2\text{Im}(n_{\text{eff}})k} \left\{ \frac{3f}{4\pi a^3} + (2\pi)^3 \left( \frac{3f}{4\pi a^3} \right)^2 H(\xi_s) \right\} \right. \\ \left. + 4\pi \left( \frac{3f}{4\pi a^3} \right)^2 \left| \frac{\exp\{i(n_{\text{eff}} - n_e \cos\theta)kl\} - 1}{i(n_{\text{eff}} - n_e \cos\theta)k} \frac{J_1(n_e kd/2\sin\theta)}{n_e k \sin\theta} \right|^2 \right. \\ \left. - \frac{4}{l} \frac{3f}{4\pi a^3} \left| \frac{\exp\{i(n_{\text{eff}} - n_e \cos\theta)kl\} - 1}{i(n_{\text{eff}} - n_e \cos\theta)k} \frac{J_1(n_e kd/2\sin\theta)}{n_e kd/2\sin\theta} \right|^2 \right] \quad (10-1)$$

$$\approx \left| \frac{2\mathbf{A}(\theta, \phi)}{(n_e + n_{\text{eff}})k} \right|^2 \frac{1 - \exp\{-2\text{Im}(n_{\text{eff}})kl\}}{2\text{Im}(n_{\text{eff}})k} \left\{ \frac{3f}{4\pi a^3} + (2\pi)^3 \left( \frac{3f}{4\pi a^3} \right)^2 H(\xi_s) \right\} \quad (10-2)$$

$$\approx \left| \frac{2\mathbf{A}(\theta, \phi)}{(n_e + n_{\text{eff}})k} \right|^2 \frac{3}{4\pi a^3} \frac{f(1-f)^4}{(1+2f)^2} l \quad (10-3)$$

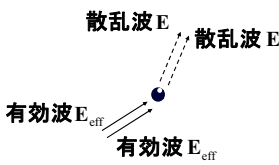


図2 独立散乱.

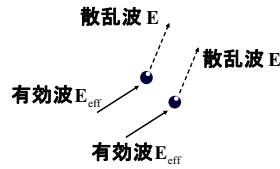


図3 干渉散乱.

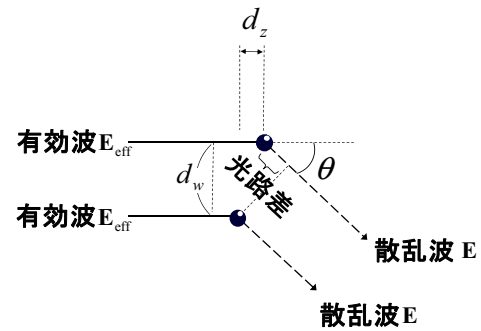


図4 干渉散乱と光路差の関係.

## 2.1 解析解の物理的解釈

式 (10-1) を第1項～第4項に分け、各項の物理的意味を考察する.

### ・第1項

1粒子による散乱 (以下独立散乱とよぶ) を粒子数分足し合わせた項である. 図2に1粒子による独立散乱の様子を示す. この場合、 $N$ 個の粒子から1個を選び出す場合の数は $N$ 通りであるから $N$ に比例する. そして式 (9) を用いると $f$ に比例することがわかる. この項はランベルトベールの法則と本質的に同一である.

### ・第2項

同一粒子配置内の2粒子によって干渉した散乱 (以下干渉散乱とよぶ) を2粒子の組み合わせ数分足し合わせた項である. 図3に2粒子による干渉散乱の様子を示す.  $H(p)$  を導入することにより2粒子の間隔は確率的に決まり、干渉散乱は統計値として計算される.  $H(p)$  として Percus-Yevick 関数を採用すると2粒子が非常に近い距離 (粒子径の5倍程度) にあるペアによる干渉散乱が支配的となり、遠い距離にあるペアによる干渉散乱はコヒーレント成分として第4項に現れている. この場合、 $N$ 個の粒子から順序を区別して2個を選び出す場合の数は $N(N-1) \underset{\text{vsi}}{\approx} N^2$ であるから、式 (9) を用いると $f^2$ が乗じられることとなる.

### ・第3項

異なる粒子配置内の2粒子による干渉散乱を2粒子の組み合わせ数分足し合わせた項である. 2粒子は同一粒子配置内に存在しないため、2粒子の位置関係に制限はなく媒質中のどこでも等確率で存在するため $H(p)$ は現れない. この場合、ある粒子配置にある $N$ 個の粒子から1個を選び出し、それとは異なる粒子配置にある $N$ 個の粒子から1個を選び出す場合の数は $N \times N = N^2$ であるから $N^2$ に比例する. そして式 (9) を用いると $f^2$ に比例することがわかる. これは散乱のコヒーレント成分を表す項である. 図4に2粒子の位置と光路差の関係を示す.

2粒子による光の散乱波の光路差は粒子間の媒質幅方向の距離 $d_w$ と媒質厚方向の距離 $d_z$ を用いて $\varphi = n_e d_w \sin\theta + (n_{\text{eff}} - n_e \cos\theta) d_z$ で表され、 $\theta \neq 0$ のときには干渉散乱波の強め合いや弱め合いが起こる. アンサンブル平均を取る際に媒質幅 $d$ が波長と比べて十分に大きい場合には、媒質幅方向にあらゆる距離で存在する2粒子の組み合わせを取ればよい. これは粒子間隔の媒質幅方向成分 $d_w$ のあらゆる値について足し合わせることになる. これによって、干渉

表1 計算パラメーター.

波長 (nm)	587.6
粒子半径 (nm)	24
粒子屈折率	1.55
母材屈折率	1.334
媒質厚 (nm)	300

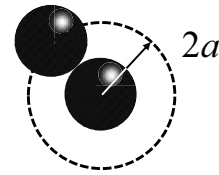


図6 2粒子が重なって存在する領域.

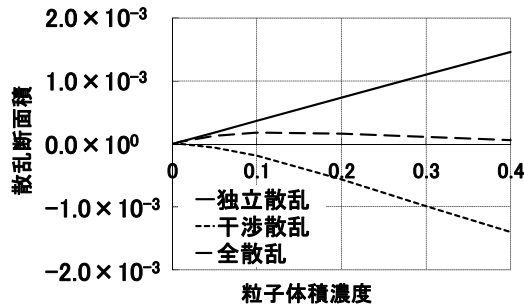


図5 粒子体積濃度を変化させたときの全散乱, 独立散乱, 干渉散乱の散乱断面積変化.

散乱波はゼロとみなすことができる. これに対して,  $\theta = 0$  のときには光路差は  $\varphi \approx 0$  となり (粒子体積濃度が小さく  $n_{\text{eff}} \approx n_c$  とみなせる場合) 2粒子間の間隔によらずいつも散乱波は強め合うため干渉散乱は正の値を取る. しかし,  $\theta = 0$  は透過光の進行方向であり, 粒子分散型光学材料では透過光のエネルギーは干渉散乱のエネルギーよりも非常に大きい条件で使用するため無視することができる.

#### ・第4項

第3項と同様に2粒子の位置関係に制限のないペアによる干渉散乱である. 第2項で無視した  $-N$  から発生する項であるため負の値を取る. この項は第3項と似た振る舞いをするが2粒子の組み合わせ数には比例せず粒子数  $N$  に比例するため, 式(9)を用いて  $f$  に比例する. 媒質厚  $l$  や媒質幅  $d$  が波長よりも十分に大きくなるとこの項の寄与は無視できる.

表1の計算パラメーターの値を用いて散乱断面積の独立散乱寄与(式(10-2)第1項)と干渉散乱寄与(式(10-2)第2項)の粒子体積濃度依存性を図5に示した.

図5により, 微分散乱断面積の独立散乱による寄与が常に正の値を取るのに対して, 干渉散乱による寄与は負の値を取り, 干渉散乱が独立散乱を打ち消すように働いていることがわかる. これは次のように説明することができる. 2粒子による干渉は式(10-1)第3項についての説明で論じたように, 微粒子分散媒質が非常に大きい場合には媒質内のあらゆる2粒子間隔について和を取ることで強め合い弱め合いが均等に起こり,  $\theta \neq 0$  ではゼロであると見なすことができる. しかしながら, 2粒子は重なって存在することはできないので2粒子の間隔は  $2a$  より小さくなれな

い. つまり, 2粒子が重なって存在した場合の干渉散乱による寄与を全体から引いておく必要があるため干渉散乱は負の値を取り, 独立散乱を打ち消すように働く. 図6に示すようにある粒子に注目して, 他の粒子が注目する粒子から  $2a$  より近くに存在する確率は, 注目する粒子から半径  $2a$  の球体内に他の粒子 ( $N-1$  個の粒子から1個を選び出す) が存在する確率であるから  $4\pi(2a)^3/3V \times (N-1) \approx 8f$  となる. 式(10-3)の  $f$  に依存する部分を  $f$  の多項式で展開すると  $f(1-f)^4(1+2f)^{-2} = f - 8f^2 + \dots$  となっており, 干渉散乱の寄与の最低次項が  $-8f^2$  となっているのはこのためである.

粒子体積濃度がきわめて低い場合には全散乱を独立散乱だけで近似できることはよく知られている. 粒子体積濃度が低いときには独立散乱に対する干渉散乱の微分散乱断面積の大きさの割合は  $8f^2/f = 8f$  となる. 例えば, この値が  $1.0 \times 10^{-3}$  以下になるときに干渉散乱を無視できるとすれば  $f \leq 1.25 \times 10^{-4}$  となり, およそ粒子体積濃度が  $1.0 \times 10^{-4}$  程度のときに独立散乱だけで近似できることになる.

### 3. 解析解の正当性検証

解析解と T-matrix 法を用いた数値計算の計算結果を比較し, その差異の物理的意味を考察し, 解析解の正当性を検証する. T-matrix 法では微分散乱断面積を式(11)で定義する.

$$I_s(\mathbf{r}) = \frac{r^2}{S} \left[ \frac{1}{N_r} \sum_{\tau=1}^{N_r} |\mathbf{E}^\tau(\mathbf{r})|^2 - \left| \frac{1}{N_r} \sum_{\tau=1}^{N_r} \mathbf{E}^\tau(\mathbf{r}) \right|^2 \right] \quad (11)$$

式(11)の第2項は式(10-1)の第3項に現れるコヒーレント成分である. つまり式(11)はコヒーレント成分を除いた形となっているが, これは粒子分散型材料の媒質幅をきわめて小さく設定しても式(10-1)の第3項に相当するコヒーレント成分がゼロになるようにしている.

計算パラメーターは表1の値を用いたが, 媒質幅と粒子配置変更回数に関しては T-matrix 法にのみ用いる値であり, 表2の値を用いた. T-matrix 法においては計算機コストの制限により媒質幅を実際の粒子分散型材料の媒質幅よりきわめて小さい値に設定する必要がある. また, T-matrix 法では, 粒子配置変更によるアンサンブル平均を数

表2 T-matrix 法計算パラメーター.

媒質幅 (nm)	約 600
粒子配置変更回数	200

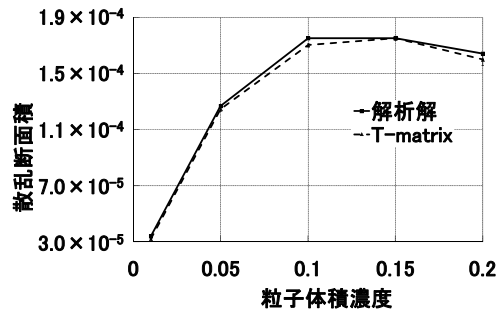


図7 粒子体積濃度を変化させたときの散乱断面積変化の比較.

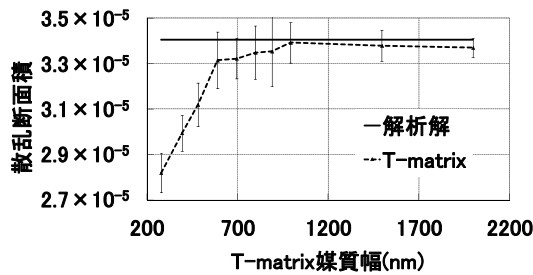


図8 媒質幅を変化させたときの総散乱量変化.

値的に計算する.

粒子体積濃度を変化させたときの散乱断面積の変化を図7に示した. T-matrix 法の計算結果に示したエラーバーはアンサンブル平均を取ったときの標準偏差を表している. これにより, T-matrix 法の計算結果は常に解析解よりも低い値となっていることがわかる.

T-matrix 法による散乱断面積の計算結果が解析解の計算結果を下回っている理由について次に考察する. 粒子体積濃度を0.01として, 媒質幅を変化させたときの散乱断面積の変化を図8に示した. T-matrix 法において媒質幅を大きくして解析解の媒質幅無限大という条件に近づけると, 総散乱量の小さい値から増加して, 解析解の計算値に近づいているのがわかる.

この現象を詳しくみるために微分散乱断面積の角度分布の計算結果を解析解と T-matrix 法で比較する. 図9は  $x$  偏光の入射波に対して, 散乱角の極角  $\theta$  を  $0 \sim 180^\circ$  で変化させ, 方位角  $\phi$  を  $0^\circ$  に固定したときの微分散乱断面積を解析解と T-matrix 法で比較した結果を示している. T-matrix 法による微分散乱断面積の計算結果は低散乱角で解析解を大きく下回っている. T-matrix 法による計算結果が解析解の計算結果から乖離して落ち込みが起こるおおよそ

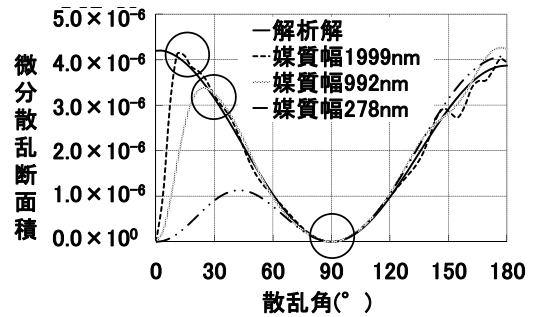


図9 媒質幅を変化させたときの微分散乱断面積角度分布変化の比較.

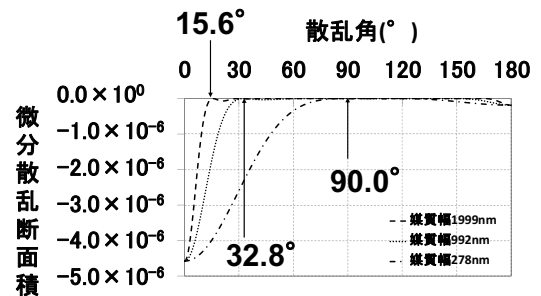


図10 媒質幅を変化させたときの式 (10-1) 第4項変化の比較.

の散乱角を, 図9中に○で示した. 落ち込みが起こる散乱角は媒質幅によって変化し, 媒質幅が大きくなるほど小さくなっているのがわかる.

T-matrix 法による微分散乱断面積が低散乱角で落ち込む理由を次に考察する. T-matrix 法の計算においては計算コストの理由から媒質幅や媒質厚を波長と同程度の値を用いて計算しているため, 解析解の式中の式 (10-1) 第4項が無視できない. この項は負の値を取るため低散乱角で微分散乱断面積を打ち消すように働いている. 図10に媒質幅を変化させたときの式 (10-1) 第4項の変化を示す.

式 (10-1) 第4項はベッセル関数  $J_1(x)$  を含むため,  $x \leq 3.832$  で小さくなる.  $1/2n_c k d \sin \theta = 3.832$  となる  $\theta$  を計算すると  $d = 1999 \text{ nm}$  のときに  $\theta = 15.6^\circ$ ,  $d = 992 \text{ nm}$  のときに  $\theta = 32.8^\circ$  であり, 図9中の○で示した位置とよく一致する. また,  $d = 278 \text{ nm}$  のときには  $1/2n_c k d \sin \theta = 3.832$  となる  $\theta$  は存在しないため  $A(\pi/2, \phi) = 0$  となる  $\theta = 90^\circ$  で式 (10-1) 第4項は0となり, 図9中で  $d = 278 \text{ nm}$  のときには前方散乱全域 ( $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ) にわたって落ち込みが起こっているのがわかる. さらに後方散乱 ( $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) では媒質幅が大きいほど微分散乱断面積の値が波打っているが, これはベッセル関数のフリンジが見えているためである.

T-matrix 法を用いた計算では計算機の制限等により媒質幅を数百~数千 nm までしか確保できない. これにより低

散乱角での散乱強度の落ち込みが起こってしまう。これに対して解析解では、媒質幅を任意の値に設定できるため大きくとることで低散乱角での微分散乱断面積の落ち込みは起こらない。実際に用いる粒子分散型光学材料の媒質幅は数 mm ～ 数 cm の大きさであるから、 $d = 5 \text{ mm}$  とし、 $1/2n_c kd \sin \theta = 3.832$  となる  $\theta$  を計算すると  $\theta = 6.2 \times 10^{-3}$  となる。つまり微分散乱断面積の落ち込みが起こる範囲は非常に狭くなる。このとき、粒子分散型光学材料から光学系の像面までの距離を 5 mm とすると、像面上での微分散乱断面積の落ち込みが起こる範囲はおおよそ  $1 \mu\text{m}$  であり、一般的な電子撮像素子の画素サイズよりも小さいため透過光に埋もれてしまう。したがって、式 (10-1) を式 (10-2) で近似することは問題がない。

粒子による光の多重散乱を見積もるために解析解を導出し、定量化できることを示した。そして、解析解の各項のもつ意味を定性的・定量的に把握し、解析解の正当性を確かめた。また、解析解による計算結果と T-matrix 法による

数値計算結果を比較してそれらの差異の物理的意味を明らかにすることにより、解析解が T-matrix 法の極限として振る舞っていることを確認した。以上により、粒子分散型光学材料を想定した大きな領域に分散された多数の粒子による光の多重散乱解析に導出した解析解が適用可能であることを検証した。特に実際の系では式 (10-2) で記述できることを示した。

## 文 献

- 1) P. C. Waterman: "Matrix formulation of electromagnetic scattering," Proc. IEEE, **53** (1965) 805-811.
- 2) L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding and C. O. Ao: *Scattering of Electromagnetic Waves: Numerical Simulations* (Wiley, New York, 2001) pp. 533-547.
- 3) L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding and C. O. Ao: *Scattering of Electromagnetic Waves: Advanced Topics* (Wiley, New York, 2001) pp. 207-213.
- 4) M. S. Wertheim: "Exact solution of the Percus-Yevick integral equation for hard spheres," Phys. Rev. Lett., **20** (1963) 321-323.

(2014 年 6 月 11 日受理)